ZUR DIDAKTIK DER ANWENDUNGEN INNERHALB EINES AUSGEWOGENEN MATHEMATIKUNTERRICHTS

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Erziehungswissenschaften
an der Pädagogischen Hochschule Ruhr in Dortmund

vorgelegt von
UWE BECK
Nürtingen

Drucklegung: November 1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41538101_0032

ZUR DIDAKTIK DER ANWENDUNGEN INNERHALB EINES AUSGEWOGENEN MATHEMATIKUNTERRICHTS

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Erziehungswissenschaften
an der Pädagogischen Hochschule Ruhr
in Dortmund

vorgelegt von

UWE BECK, NÜRTINGEN

Drucklegung: November 1979

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referenten: Prof. Dr. Erich Wittmann
Prof. Dr. Roland Fischer
Prof. Dr. Georg Schrage

Tag der mündlichen Prüfung: 26.11.1979

Vorwort

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, den Aspekt der Mathematik, den man mit "Anwendungen" bezeichnet, von einem mathematikdidaktischen Standpunkt aus zu betrachten.

In jüngster Zeit erfreut sich der Anwendungsaspekt in der fachdidaktischen Diskussion eines großen Interesses, so daß man fast schon von einer Modeerscheinung sprechen kann. Dabei wird leicht vergessen, daß Anwendungen sowohl im Unterricht der allgemeinbildenden Schulen als auch in den Veröffentlichungen der meisten deutschen Didaktiker vor einigen Jahren noch ein Schattendasein führten. Die Berichte der Bundestagungen für Didaktik der Mathematik 1970 - 1974 belegen dies. Die ersten Ansätze zu der vorliegenden Arbeit wurden im Sommer 1973 ausgearbeitet. Da es seinerzeit keine aktuelle Diskussion gab, die unmittelbar greifbare Konzepte hätte liefern können, ist es ganz natürlich, daß ich zunächst versucht habe, naiv, mehr meinem Gefühl von einem "gesunden" Mathematikunterricht folgend, Beispiele zu konstruieren, die über die üblichen Textaufgaben hinausgehen sollten. Erste Vorbilder waren hier Beispiele aus dem englisch-sprachigen Raum. Es war aber von vornherein klar, daß sich die Arbeit nicht im Produzieren von Beispielen erschöpfen konnte, sondern daß diese Beispiele auch auf ein theoretisches Konzept bezogen werden müßten.
Für eine solche theoretische Strukturierung

konnte ich die Ansätze zu einer Theorie des Mathematikunterrichts benutzen, die gerade um diese Zeit an der Pädagogischen Hochschule Ruhr entwickelt wurden.[1] Insbesondere zwei Ideen stellten sich als hilfreich heraus:

- In methodologischer Hinsicht zeigte die Betrachtung der Mathematikdidaktik als integrierende Grenzdisziplin einen Weg zur Ordnung vieler verschiedenartiger intuitiv gewonnener Resultate und Einsichten.

- In didaktischer Hinsicht bot das genetische Prinzip den Grundgedanken für den Entwurf eines "ausgewogenen" Unterrichts und die Einbettung bzw. Konstruktion von Beispielen.

Die Aufarbeitung von Literatur zum genetischen Prinzip[2] führte auf ältere Literatur, deren Studium deutlich zeigt, daß das Ziel einer angemessenen Berücksichtigung der Anwendungen im Mathematikunterricht nicht etwa neu ist, sondern daß es in Deutschland eine alte Tradition hat, die nach dem zweiten Weltkrieg zunehmend verdrängt wurde. Mit meiner Arbeit möchte ich die Verbindung zu den früheren Entwicklungen bewußt herstellen. Überhaupt ist zu hoffen, daß mit der Institutionalisierung der Mathematikdidaktik ein "kollektives Gedächtnis" (J. KILPATRICK) entstehen wird, das in Zukunft eine langfristige Verfolgung von Perspektiven ermöglicht und heftige Kurswechsel vermeiden hilft, wie sie vor noch nicht langer Zeit bei der Curriculumentwicklung sichtbar wurden.

Abschließend möchte ich all denjenigen danken, die mein Vorhaben auf verschiedene Weise gefördert haben. Zunächst danke ich Herrn Professor Dr. S. AVITAL (Haifa)

---

1) Vgl. E. WITTMANN: "Grundfragen des Mathematikunterrichts (1974^1), (1976^4).

2) Vgl. auch SCHUBRING (Dissertation 1977)

für seine Mitwirkung bei der Themenstellung (1973) und seinem aufmunternden Wohlwollen, das er meiner Tätigkeit entgegenbrachte.
In einer mittleren Phase der Arbeit (1976) hatte ich die Gelegenheit, verschiedenen Mathematikdidaktikern Teile dieser Arbeit bei unterschiedlichen Gelegenheiten zur Diskussion zu stellen. Besonders bedeutsam waren mir die ausführlichen Anmerkungen von H.M.I. Dr. T.J. FLETCHER (Darlington) und Herrn Professor Dr. G. POLYA (Stanford), die den eingeschlagenen Kurs stabilisierten.
Für die Detaillierung einzelner Abschnitte und die Konstruktion relevanter Anwendungen in der Chemie waren mir die Gespräche und gemeinsamen Lehrveranstaltungen mit Herrn Professor Dr. H.-J. SCHMIDT, Vertreter der Chemiedidaktik in unserem Fachbereich, sehr hilfreich.
Herrn Professor Dr. R. FISCHER (Klagenfurt) habe ich für viele bis ins Detail gehende Anregungen auch redaktioneller Art zu danken. Ebenso danke ich Herrn Professor Dr. G. SCHRAGE (Dortmund) für verschiedene Hinweise.
Mein besonderer Dank gilt jedoch Herrn Professor Dr. E. WITTMANN (Dortmund), der diese Arbeit von Anfang an begleitete, wesentliche Ideen für die Gesamtkonzeption beisteuerte und mir insbesondere bei der langwierigen Anfertigung der Endfassung behilflich war.

ZUR DIDAKTIK DER ANWENDUNGEN INNERHALB EINES AUSGEWOGENEN MATHEMATIKUNTERRICHTS

Vorwort 1

Inhaltsverzeichnis 1

Einleitung 5

K a p i t e l I

Vorliegende Konzeptionen zur Didaktik der Anwendungen 8

1. Theoretische Ansätze zur Didaktik der Anwendungen seit Beginn des Jahrhunderts 11

1.1 Die "Meraner Reform" und ihre Weiterführung 11

1.2 Die Didaktik des Sachrechnens 23

1.2.1 Begründungen für das Sachrechnen und seine Rolle im Rechenunterricht 24

1.2.2 Methodik des Sachrechnens 27

1.3 "Here is a situation - think about it"; eine Konzeption aus dem englischsprachigen Raum 37

1.4 Der sogenannte "gesellschaftskritische" Ansatz 48

1.5 Tendenzen in der gegenwärtigen Diskussion zur Didaktik der Anwendungen 51

2. Berücksichtigung der Anwendungen in deutschen Lehrplänen und Schulbüchern seit Beginn des Jahrhunderts 58

2.1 Anwendungen in Lehrplänen und Schulbüchern der Gymnasien 58

2.2 Anwendungen in Lehrplänen und Schulbüchern der Volks-, Grund- und Hauptschulen 68

K a p i t e l II

Philosophischer Hintergrund eines ausgewogenen Mathematikunterrichts 74

1. Grundauffassungen von der Mathematik 76
1.1 Mathematik als autarke Wissenschaft 77
1.1.1 Geschichtlicher Rückblick 78
1.1.2 Die Position von G.H. HARDY 81
1.2 Mathematik als Hilfsmittel 85
1.3 Das ausgewogene Bild der Mathematik 88
1.3.1 Mechanismus der Genese von Mathematik in einer Beschreibung von D. HILBERT 90
1.3.2 Bedeutung der Anwendungen für die Weiterentwicklung der Mathematik - Meinungen und Fallstudien 92
1.3.3 Bedeutung innermathematischen Arbeitens für Anwendungen 99
1.3.4 Illustration des ausgewogenen Bildes am Werk berühmter Mathematiker: ARCHIMEDES, GAUSS und ihre Zeitgenossen 101
1.3.5 Verschiedene Sichtweisen des ausgewogenen Bildes 111
1.3.6 Hinweise auf die Aktualität der Diskussion 114
2. Entscheidung für einen ausgewogenen Mathematikunterricht 118
2.1 Die Vertretbarkeit der extremen Grundauffassungen 119
2.2 Kritik an den extremen Grundauffassungen aus mathematikdidaktischer Sicht 122
2.3 Pädagogisch-didaktische Gründe für einen ausgewogenen Unterricht 131
2.4 Warum hat sich der ausgewogene Standpunkt nicht durchgesetzt? 139
3. Modellbilden 144
3.1 Modellbegriff 145
3.2 Verschiedene Schritte im Prozess des Modellbildens 153

K a p i t e l III

Beiträge zu einer praktischen Unterrichtslehre für den Anwendungsaspekt im Rahmen eines ausgewogenen Mathematikunterrichts 166

1. Das genetische Prinzip und drei Standpunkte beim Mathematisieren 168
1.1 Das genetische Prinzip 168
1.2 Einzelbeiträge zu den drei Standpunkten des Mathematisierens 170
1.3 Beschreibung der drei Standpunkte 177

2. Modellbilden im Unterricht 187
2.1 Verschiedene Situationen - ein Modell 188
2.2 Verschiedene Modelle für das gleiche Problem 202
2.3 Problemformulierung, Mängeldiskussion, Modellmodifikation 223
2.4 Modellierung mathematischer Situationen 229
2.5 Die Verwendung von Hilfsmitteln beim Modellbilden - erläutert am Beispiel des Computers 234
2.6 Verkürzungen beim Modellbilden - eingekleidete Aufgaben 241

3. Zur Organisation der Anwendungen in der Schule 248
3.1 Unterrichtsformen und administrative Randbedingungen 248
3.2 Ausbildung und Weiterbildung der Lehrer 260

K a p i t e l IV

Konstruktion von Unterrichtsbeispielen 271

1. Über die Auswahl von Problemsituationen 272

2. Mathematik am Skilift - ein Beispiel zu einem ausgewogenen Mathematikunterricht "im Kleinen" 275

3. Feldmausplage - ein Beispiel zum Projektunterricht 291

4. Computer - und graphenorientiertes Verfahren zur Bestimmung chemischer Summenformeln - ein Beispiel zur Anwendung von Mathematik im Chemieunterricht 322

5. Einführung in die Analysis an Auslaufvorgängen aus Wasserbehältern - ein Beispiel für Kooperation zwischen mathematischem und naturwissenschaftlichem Unterricht 344

Literatur 373

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist in ihren groben Zügen nach dem methodologischen Rahmen der Mathematikdidaktik gegliedert, den WITTMANN (1976[4]/1975a) angegeben hat. WITTMANN unterscheidet drei Hauptgebiete der Mathematikdidaktik:

a) Konstruktion von Unterrichtsvorlagen,
b) Theorien und empirische Befunde, Erziehungsphilosophie,
c) praktische Unterrichtslehren.

Diese drei Hauptgebiete stehen untereinander in Wechselwirkung und in Beziehung zu den Bezugswissenschaften der Mathematikdidaktik wie Mathematik, Wissenschaftsgeschichte, Erkenntnistheorie, Pädagogik usw.. Das Gebiet "Praktische Unterrichtslehren" steht in unmittelbarem Bezug zur Praxis. Ein Ansatz dieser Art, welcher dem Beziehungsreichtum mathematikdidaktischen Arbeitens Rechnung trägt, ist insbesondere für das Thema "Anwendungen" nötig. Gerade mit diesem breiten Ansatz verbinde ich die Hoffnung, daß diese Arbeit (wenn auch in bescheidenstem Maße) den Unterricht im einzelnen und die Curriculumentwicklung im allgemeinen beeinflussen kann.

Es mag auf den ersten Blick erstaunen, daß in dieser Arbeit die Bezugswissenschaft Mathematik nicht - wie in vielen didaktischen Arbeiten üblich - dadurch berücksichtigt wird, daß bestimmte Inhalte einer didaktischen Analyse unterworfen werden. Das ist aber ganz natürlich, da es sich hier nicht um die mathematikdidaktische Bearbeitung eines speziellen mathematischen Gebiets handelt. Statt der Analyse eines mathematischen Inhalts wird vielmehr der Vorgang des Anwendens selbst analysiert, der sich natürlich auf die verschiedenen Teilgebiete stützt.

Die Arbeit ist dem eben Gesagten entsprechend in zwei große Teile gegliedert:
Die beiden ersten Kapitel sind vorwiegend Bezugsdisziplinen der Mathematikdidaktik wie Geschichte der Mathematik und Philosophie gewidmet; enthalten aber auch Ansätze zu einer Erziehungsphilosophie (Arbeitsgebiet b) der Mathematikdidaktik). Die letzten beiden Kapitel III und IV sollen in der Hand des Lehrers den Unterricht unmittelbar beeinflussen können. Kapitel III enthält Elemente einer praktischen Unterrichtslehre. Ihr liegen Entscheidungen über Ziele zugrunde, die in Kapitel II gefallen sind. Kapitel IV besteht aus Unterrichtsbeispielen die an der Unterrichtslehre ausgerichtet sind und sie illustrieren.
Ausführlicher dargestellt sind die Schwerpunkte der einzelnen Kapitel folgendermaßen verteilt:

Kapitel I enthält einen Rückblick auf historische Strömungen, in denen Anwendungen im Mathematikunterricht einen besonderen Platz gehabt haben. Zunächst werden Konzeptionen und Theorien dargestellt, anschließend wird untersucht, inwieweit sie ihren Niederschlag in Schulbüchern und Lehrplänen gefunden haben. Es werden dabei Ideen und Ansätze zu Tage treten, die in eine schulart- und stufenunabhängige Didaktik eingebracht werden können. Andererseits weisen die einzelnen Strömungen auch Defizite auf. Hieraus ergeben sich naturgemäß einige Ziele für diese Arbeit. Es sollen Grundlagen - eventuell im Sinne von BRUNERs "Fundamentale Ideen" - für einen anwendungsorientierten M.U. formuliert werden, die den Unterricht von der Grundschule bis zum Abitur und darüber hinaus begleiten können. In Bezug auf den Leser hat dieses Kapitel auch die Aufgabe, ihn in eine Vielfalt von Ideen zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht einzuführen, ohne zu sehr in begriffliche Feinheiten einzudringen. Es wird sich zeigen, daß die Ideen keineswegs einheitlich, ja teilweise sogar gegenläufig sind.

Im zweiten Kapitel werden die zentralen Themen von Kapitel I expliziert:
Erstens werden unterschiedliche Grundauffassungen von der Mathematik als Wissenschaft dargestellt, die entsprechend unterschiedliche Konzeptionen von Mathematikunterricht prägen. Zweitens werden diese Grundauffassungen von einem pädagogischen Standpunkt aus bewertet und es ergibt sich eine Entscheidung für die ausgewogene Auffassung als philosophischen Hintergrund für den Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen. Drittens wird als zentrale Idee des Anwendens von Mathematik der Prozess des Modellbildens dargestellt.

Im Kapitel III wird auf der Grundlage von Kapitel II ein Ansatz zu einer praktischen Unterrichtslehre versucht: Dabei werden auch Gedanken einfließen, die im ersten Kapitel referiert wurden.

Kapitel IV, das mit Kapitel III in einem korrespondierenden Verhältnis steht, beinhaltet Beiträge zum dritten Hauptaufgabengebiet der Mathematikdidaktik "Konstruktion von Unterrichtsvorlagen."

Abschließend möchte ich den Leser darauf hinweisen, daß in den Kapiteln II und III gelegentlich auf die Beispiele des Kapitel IV bezug genommen wird. Es ist sicher sinnvoll diese Beispiele vorher zu lesen, sofern sie nicht aus früheren Veröffentlichungen bekannt sind.

VORLIEGENDE KONZEPTIONEN ZUR DIDAKTIK DER ANWENDUNGEN.

Die in der vorliegenden Arbeit beabsichtigten Überlegungen und Vorschläge zu einer Didaktik des anwendungsorientierten Mathematikunterrichts sollen nicht unter Ignorierung, sondern unter bewußter Rückbesinnung auf die didaktische Tradition entwickelt werden. Ich beginne deshalb mit einem geschichtlichen Abriß über vorliegende Konzeptionen zur Didaktik der Anwendungen. Dieses Vorgehen scheint mir aus verschiedenen Gründen sinnvoll. Zunächst werden Auseinandersetzungen mit der Geschichte der Mathematikdidaktik gegenwärtig selten geführt. Insbesondere liegt m. W. für das Thema "Didaktik der Anwendungen" eine ausführlichere geschichtliche Untersuchung nicht vor. Über die bloße historische Information hinaus wird aber zweitens das Ziel verfolgt, die Kontinuität didaktischen Arbeitens zu sichern. Im Erziehungswesen gibt es zahlreiche Beispiele dafür, wie eine ahistorische Einstellung Modeströmungen und unhaltbare Übertreibungen hervorbringen kann. Darauf muß gerade in einer Arbeit, in der ein "ausgewogener " Standpunkt bestimmt werden soll, besonders beachtet werden. Drittens kommt die historische Perspektive einem didaktischen Anliegen des Verfassers entgegen: Sie erlaubt es, in die Thematik der Arbeit ohne Benützung eines ausgefeilten begrifflichen Apparats und unter Rückgriff auf teilweise Bekanntes einzuführen.

Es ist klar, daß der historische Gang aus Raumgründen nicht in aller Breite dargestellt werden kann. Ich konzentriere mich daher im wesentlichen auf den deutsch- und englischsprachigen Raum und gehe weniger auf Details denn auf Hauptströmungen ein, wie sie seit der Jahrhundertwende m.E. deutlich hervortreten. Die Hauptströmungen werden anhand von didaktischer Literatur, Lehrplänen und Schulbüchern verfolgt und jeweils in einem kurzen Kommentar bewertet.

Die Analyse der Strömungen erfolgt vorwiegend unter zwei Gesichtspunkten: Einerseits werden diejenigen Ideen herausgearbeitet, die geeignet sind, eine moderne Konzeption von anwendungsorientiertem Mathematikunterricht mitzutragen; andererseits werden Defizite der einzelnen Strömungen identifiziert, die in folgenden Kapiteln teilweise abgedeckt werden sollen.

Die erste hier darzustellende Strömung ist die um diese Jahrhundertwende entstandene Bewegung der "Meraner Reform". Sie konzentrierte sich auf den gymnasialen Bereich und hatte in F. KLEIN ihren großen Theoretiker, Organisator und Repräsentanten nach außen. Nach dem ersten Weltkrieg wurde dieses Reformwerk vor allem von W. LIETZMANN fortgeführt.
Eine zweite Strömung verlief innerhalb der Didaktik des Volksschulunterrichts. Sie wurde angetrieben durch das Ziel, Volksschüler "lebens- und berufsfähig" zu machen. KÜHNEL, OEHL, KARASCHEWSKI, LUBOWSKY u.a. leisteten von der Jahrhundertwende bis herauf in die sechziger Jahre bedeutende Beiträge zu dem sogenannten "Sachrechnen".
In einer dritten Strömung fließen Ansätze aus dem englischen Sprachraum zusammen, deren Wurzeln zum Teil bis in das letzte Jahrhundert zurückreichen, die aber erst Ende der sechziger Jahre didaktisch expliziert wurden. In diesen Beiträgen wird besonderer Wert auf Anwendungen im täglichen Leben gelegt, und das Recht der Mathematik im Schulkanon wird aus ihrer "Nützlichkeit" abgeleitet. Bezeichnend ist für diese Strömung weiter eine klare erkenntnistheoretische Sicht des Verhältnisses zwischen Mathematik und ihren Anwendungen. Aus deutscher Sicht bekommt der britische Ansatz deswegen ein besonderes Gewicht, weil darin der Gedanke der Anwendungen im Schulunterricht zu einer Zeit am Leben erhalten wurde, als in der übrigen westlichen Welt die Anwendungen der Mathematik unter dem Einfluß der "Neuen Mathematik" vollends zu einer unbedeutenden Nebensache im Unterricht herabzusinken drohten.

Seit wenigen Jahren zeichnet sich mit dem sogenannten "gesellschaftskritschen" Ansatz noch sehr vage eine vierte Tendenz ab, die teilweise in bewußtem Gegensatz zu traditionellen Vorstellungen verfolgt wird. Das Hauptziel besteht darin, den Schüler zur Kritikfähigkeit an der Gesellschaft zu erziehen und ihm "emanzipierende" Berufsqualifikationen zu vermitteln.

Ein Vergleich der verschiedenen Strömungen liefert ein heterogen erscheinendes Bild, was sich z.T. daraus erklärt, daß sich die Strömungen unabhängig voneinander in verschiedenem kulturellem Kontext und z.T. unter Bezug auf verschiedene Schultypen und Altersstufen entwickelten. Trotz aller Unterschiede können aber vor allem, wenn man sich die drei ersten Strömungen betrachtet, auch Gemeinsamkeiten festgestellt werden, insbesondere was die Begründungszusammenhänge für die Einbeziehung von Anwendungen in den Unterricht anbelangt. Die neueren schul- und stufenunabhängigen Tendenzen in der Didaktik der Anwendungen, die seit etwa Mitte der siebziger Jahre dominieren, bauen bewußt auf diesen Gemeinsamkeiten auf. Anhand der Konzeption von H. WINTER soll dies abschließend aufgezeigt werden.

In methodischer Hinsicht möchte ich noch auf zwei Punkte aufmerksam machen. Einmal könnte das Vorgehen in diesem ersten Kapitel etwas problematisch erscheinen, da es gewisse Wertungen meinerseits enthält, deren Grundlage erst in nachfolgenden Teilen der Arbeit dargelegt wird. Jedoch dürfte der didaktische Vorteil, mit teilweise Bekanntem zu beginnen, den möglichen methodischen Nachteil überwiegen. Historische Berichte der folgenden Art bringen zum anderen immer ein Problem der Auswahl mit sich. Ich bitte den Leser um Verständnis, wenn ich dabei meine persönlichen Präferenzen nicht ganz unterdrücken konnte.

1. Theoretische Ansätze zur Didaktik der Anwendungen seit Beginn unseres Jahrhunderts.

Die erste Aufgabe wird es sein, die einleitend erwähnten Hauptströmungen anhand didaktischer Publikationen einiger ihrer m.E. wichtigsten Vertreter zu beschreiben.

1.1. Die "Meraner Reform" und ihre Weiterführung.

Ein starker Einfluß auf den mathematischen und auf den naturwissenschaftlichen Unterricht an höheren Schulen ging zu Beginn des Jahrhunderts von der sogenannten "Meraner Reform" aus. Diese Reform wurde gleichzeitig von hochangesehenen Fachwiseenschaftlern und Gymnasiallehrern getragen. Die politische Bedeutung, die ihr beigemessen wurde, ist vielleicht daran abzulesen, daß an einigen Tagungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte sowie der Deutschen Mathematiker Vereinigung, auf denen die Reform verhandelt wurde, der deutsche Kaiser und einige Großherzöge teilnahmen. Gemeinsames Ziel der Mathematiker und Naturwissenschaftler in der Reformkomission war es, in den Worten GUTZMERs (1906), "den Errungenschaften der Naturforschung und Mathematik eine gebührende Stellung in der Schule zu schaffen, um der Jugend eine gebührende Mitarbeit am Kulturwerk zu ermöglichen." Der berühmte Göttinger Mathematiker F. KLEIN war bis zum ersten Weltkrieg der führende Kopf der Bewegung. KLEINs Rolle wird schon daraus ersichtlich, daß die Reform häufig - wenn auch im Hinblick auf den naturwissenschaftlichen Teil der Reform nicht zurecht - als "KLEINsche Reform" direkt mit seinem Namen identifiziert wird.

Im folgenden konzentriere ich mich auf die Reformanstrengungen bezüglich des Mathematikunterrichts. Dabei sind zwei Schwerpunkte zu unterscheiden. In inhaltlicher Hinsicht wurde der Funktionsbegriff zum Leitbegriff erklärt und der Oberstufenunterricht an der Infinitesimalrechnung und Analytischen Geometrie ausgerichtet. Hieran orientierte sich das Gymnasium

bis etwa zum Jahre 1970:
Besonderes Gewicht wird den Anwendungen beigemessen. Die Auswahl der zuvor angegebenen Inhalte wird mit ihrer Bedeutung für die Anwendungen begründet. Beispielsweise läßt sich der Funktionsbegriff, wie KLEIN/SCHIMMACK (1907) betonen, zum Erfassen zahlreicher physikalischer Tatsachen gar nicht entbehren.
Über diese Vorschläge hinaus enthält der "Meraner Lehrplan" Überlegungen, wie die Anwendungen im Unterricht angemessen berücksichtigt werden können und warum dafür eine Notwendigkeit besteht.

Wir folgen nun einigen Ideen, wie sie einer von KLEIN (1906) herausgegebenen Aufsatzsammlung und der "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" (KLEIN, 1933) zu entnehmen sind. Eine zentrale Forderung, die den Mathematikunterricht in Beziehung zu anderen Wissenschaften und dem Alltagsleben bringt ist, daß man "im ganzen Unterricht, auch auf der Hochschule, die Mathematik stets verknüpft halten sollte, mit allem was den Menschen gemäßt seinen sonstigen Interessen auf seiner jeweiligen Entwicklungsstufe bewegt und was sich nur irgend in Beziehung zur Mathematik bringen läßt" (KLEIN, 1933, S. 4). Für die Beachtung der Anwendungen in der Schule führte KLEIN verschiedene Gründe an. Er erwartete eine günstige lernpsychologische Situation durch die Erzeugung einer anregenden Motivationslage bei den Schülern, den Rückgriff auf ihre Anschauung und eventuell ihren erlebten Erfahrungsschatz. Ein weiterer Grund für KLEINs Beachtung der Anwendungen war innermathematischer Art: Erstens sind Anwendungen ein Teil der Mathematik und zweitens sind es gerade Probleme aus der Umwelt, die die Mathematik vorantreiben: "... das Lebendige der Mathematik, die wichtigsten Anregungen, ihre Wirksamkeit nach außen hin beruhen durchaus auf den Anwendungen, d. h. auf den Wechselbeziehungen jener rein logischen Dinge zu allen an

deren Gebieten" (KLEIN, 1933, S. 5). Hier deutet sich eine Bedeutung der Anwendungen an, die über die Mathematik hinaus geht, nämlich ihre Nützlichkeit, ihre Rolle als Hilfsmittel in den Naturwissenschaften, im Beruf und im täglichen Leben. Der Unterricht sollte daher so angelegt sein, "..., daß etwa der Naturwissenschaftler oder Versicherungsmann das mathematische Rüstzeug, das er auf alle Fälle braucht, bereits von der Schule mitbringt" (S. 5). GUTZMER (1906) formulierte dieses Anliegen in noch allgemeinerer Form. Vornehmstes Ziel des Mathematikunterrichts sei es, dem Schüler "... die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt" zu ermöglichen.

KLEIN versuchte, seine Grundidee vom Zusammenhang der Mathematik mit der Realität durch folgenden Katalog von Maßnahmen auf verschiedenen Ebenen institutionell zu verankern, und zwar gleichermaßen in der Hochschule wie auch in der Schule, wobei er sich der Notwendigkeit enger Beziehungen zwischen Hochschule und Schule bewußt war:

1. Auf fachwissenschaftlicher Ebene sollten die Verbindungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaften durch die Gründung eines mathematisch-physikalischen Instituts gepflegt werden.

2. Für die Ausbildung der Lehramtskandidaten sollten spezielle Vorlesungen angeboten werden. KLEIN selbst hat in dieser Hinsicht Bahnbrechendes geleistet. Zwei seiner Vorlesungen sind in Buchform erschienen. Die "Vorträge über die Entwicklung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen" (1907) behandeln in erster Linie die geschichtliche Entwicklung des Unterrichts im 19. Jahrhundert sowie den Fortgang der Meraner Reform. Die Behandlung von Anwendungen wird hier jedoch nicht in konstruktiver Weise angegangen, vielmehr wird als möglich anregende Quelle auf die Literatur

verwiesen, die den berufsorientierten "mittleren Fachschulen" entstammt.
Die "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus" (1908) setzt sich zum Ziel, den mathematischen Unterrichtsstoff "unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkt der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen" (S. V).
Die Niederschrift der Vorlesung zeigt sehr deutlich die historischen Wurzeln und die gegenseitigen Zusammenhänge mathematischer Gebiete. Außer-mathematische Anwendungen mit Ausnahme kleiner Beispiele aus der Physik werden aber nicht aufgeführt. Was die Pflege der Anwendungen betrifft waren die angehenden Lehrer also auf sich gestellt. KLEIN ging offenbar von einem Lehrerbild aus, bei dem dieser kreativ und eigenständig handeln kann. Er wollte den Lehrer durch seine Überlegungen lediglich anregen, über die zweckmäßige Darbietung des von ihm zu behandelnden Lehrstoffes in neuer Weise selbständig nachzudenken. (S. VI)

3. In Göttingen wurde ein Lehrstuhl für mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht eingerichtet. Diese Maßnahme ist bis heute in Deutschland einmalig geblieben. Leider konnte diese Einrichtung keine Früchte tragen, da der Lehrstuhlinhaber SCHIMMACK kurz nach seiner Berufung 31-jährig starb. Der Lehrstuhl blieb verwaist.

4. Um bereits praktizierende Lehrer mit den Zielen der "Meraner Reform" in intensiven Kontakt zu bringen, wurden Lehrerfortbildungskurse - die bekannten Göttinger Osterkurse - eingerichtet. Sie standen unter der gemeinsamen Leitung von KLEIN und dem Physiker RIECKE.
Was die Anwendungen betrifft, so wurden verschiedene Vorträge über Anwendungen in der Physik gehalten, jedoch

nie in einem unterrichtsnahen Stil. Es handelt sich darum, wie KLEIN betonte, "den Herren von der Schule Material entgegenzubringen, welches die Wissenschaft für sie bereitgestellt hat, nicht damit sie dasselbe unmittelbar in ihrem Unterricht einfügen, sondern damit sie selbst imstande sind, ihr Lehrgebiet lebendiger und unter allgemeineren Gesichtspunkten zu erfassen". (KLEIN/RIECKE, 1904, S. 7)

5. Im Jahre 1905 wurde der sogenannte "Meraner Lehrplan" verabschiedet. Es ist eine zwischen Mathematik und Naturwissenschaften koordiniertes Gesamtwerk, in dem die einzelnen Fächer ihre Bedürfnisse auf einander abgestimmt haben.

6. In einem reichhaltigen publizistischen Wirken werden die Reformvorschläge diskutiert und weiterverbreitet.

Ein Überblick über diesen Literaturkreis und die Aktivitäten, die im Zusammenhang mit der Meraner Reform vor dem 1. Weltkrieg entfaltet wurden, deutet darauf hin, daß sie auf der organisatorischen, theoretischen und Lehrplanebene verlief. In der Vorkriegszeit wurden die großen Linien abgesteckt. Es fehlten jedoch konstruktive Anleitungen und Unterrichtsbeispiele, auf die sich der Lehrer im Unterricht stützen konnte und die die Rolle der Anwendungen im Unterricht erläuterten und konkretisierten. Nach dem 1. Weltkrieg, als sich KLEIN nicht mehr aktiv um Schulbelange kümmern konnte, war es LIETZMANN, der mit seinen Werken zum gymnasialen Unterricht an die Meraner Reform anknüpfte und diese Lücke teilweise ausfüllen konnte. Für diese Aufgabe war LIETZMANN als Direktor der mit einem Lehrerbildungsseminar gekoppelten Oberrealschule in Jena bestens geeignet. LIETZMANN pflegte durch seine Vorlesungen in Göttingen auch die Kontakte zur Universität.

Den folgenden Ausführungen über den Anwendungsaspekt in LIETZMANNs Arbeit liegen vor allem sein Hauptwerk "Methodik des mathematischen Unterrichts" zugrunde, das als dreibändiges Werk zwischen 1916 und 1924 erschienen ist. Ferner ergeben sich interessante Ideen aus dem Büchlein "Wesen der Mathematik" (1949).

Die Bedeutung, die LIETZMANN den Anwendungen im Unterricht beimaß, wird schon daraus ersichtlich, daß in der 1. Auflage der "Methodik des mathematischen Unterrichts" der Angewandten Mathematik ein ganzer Band vorbehalten blieb.
In der Einleitung zu diesem Band forderte LIETZMANN, die Zusammenarbeit der Schulfächer zu verstärken und die Erkenntnisse der Fächer untereinander in Beziehung zu bringen:
"Irre ich mich nicht, dann wird eine Verzahnung der verschiedenen Unterrichtsfächer in Zukunft verstärke Bedeutung gewinnen, und schon aus diesem Grund sollten die Vertreter von Nachbargebieten bestrebt sein, sich über gemeinsame Interessen zu unterhalten (und eine)... Zersplitterung unserer Schulfächer in ein Nebeneinander von Wissensspänchen ist zu beseitigen".

Die Verzahnung der Mathematik mit anderen Bereichen schien LIETZMANN in folgenden fünf Gebieten besonders lohnenswert.

1. Linearzeichen: Dieses war zugeschnitten auf die Bedürfnisse der Architekten, Ingenieure und Künstler. Interessant ist der Vorschlag, einen Einstieg in die Zentralperspektive über die Analyse von Kunstwerken zu versuchen.

2. Werkunterricht: In allgemeinen Worten wurde einerseits die Bedeutung der Geometrie und Arithmetik für das Handwerk herausgestellt, auf der anderen Seite wurde der Werkunterricht als der richtige Ort für die Anfertigung mathematischer Geräte und Modelle angesehen.

3. Staatsbürgerkunde und Wirtschaftslehre: Interessant sind

hier die mathematische Analyse verschiedener Wahlsysteme. Unter anderem wies LIETZMANN (1924, S. 101) auf die Bedeutung der Statistik im Wirtschaftsleben hin und äußerte sein Erstaunen darüber, daß sich der damalige Unterricht damit wenig befaßte.

4. Geodäsie und Astronomie: Es wurden praktische Feldmessübungen, nautische Aufgaben sowie die Erfassung der Himmelsbewegungen empfohlen.

5. Physik: LIETZMANN erinnerte an die wohl bekannten Anwendungen der Trigonometrie, Differential- und Integralrechnung. Vereinzelt sprach er auch Mathematisierungsprobleme an, z. B.: Welche Beziehung besteht zwischen der Spur des Vorder- und Hinterrades eines Fahrrads?

Bei der Darstellung dieser Gebiete überwog bei weitem der inhaltliche Aspekt der für die Schule möglicherweise geeigneten Anwendungsgebiete. Welche Prozesse jedoch beim Anwenden von Mathematik ablaufen und wie sie zu fördern sind, wird nur sporadisch angesprochen. Beispielsweise sollte der Fall der echten Anwendung durch einfache Fälle vorbereitet werden, etwa durch "Umsetzen von Wortgleichungen der Art: Von welcher Zahl ist 410 das Zehnfache?"
Damit ist natürlich wenig darüber ausgesagt, welche Fähigkeiten beim Bearbeiten offener Situationen nützlich sind. Jedoch hat LIETZMANN das Hauptproblem erkannt. "Wichtiger nämlich als die einzelnen Anwendungen erscheint mir das Ziel, im Schüler die Bereitschaft zur Anwendung zu wecken, die Fähigkeit zu entwickeln, Anwendungen anzupacken und zu erledigen".
Eine generelle Einbeziehung der Anwendungen in den Unterricht erfolgte in LIETZMANNs didaktischer Konzeption durch die Forderung "Der mathematische Unterricht soll wo möglich vom praktischen Leben ausgehen und wieder zum praktischen Leben hinführen".

In seinem Buch "Das Wesen der Mathematik" (1949) verfaßte LIETZMANN einen kurzen Abschnitt über Mathematik und Erziehung. Er formuliert dort Erziehungsziele des Mathematikunterrichts. Eines dieser Ziele ist die "Erziehung zur Anwendung der Mathematik", dessen nähere Beschreibung eine Aufzählung von Einzelaktivitäten beim Prozess des Anwendens von Mathematik enthält. Diese Erziehung "hat ihre Aufgabe darin zu suchen, in der sächlichen und gedanklichen Umwelt mathematische Probleme sehen zu lehren, den rein mathematischen Vorgang etwa die Rechnung, die Konstruktion, einzubauen in das Vorspiel, das hinführt zum Problem, in dem es dafür die Unterlagen durch Messung, Beobachtung, Überlegung usw. beschafft, und das Nachspiel, das die Auswertung des abstrakten Ergebnisses in der konkreten Wirklichkeit bietet."
Im engen Zusammenhang mit der Erziehung zur Anwendung der Mathematik steht die "Erziehung zur Größenerfassung", wo Größen aus dem täglichen Leben, im Beruf, in der Wissenschaft durch Messung, Schätzung, Rechnung oder irgendwelche andere "Erfahrungsmittel" zahlenmäßig zu erfassen sind.
Weitere Ziele sind: Die Erziehung zur Anschauung, wobei es im wesentlichen um die graphische Darstellung der Formen aus den eben genannten Lebensbereichen geht, und die Erziehung der logischen Fähigkeit meint Erziehung "zum richtigen Definieren der Begriffe, zum Aufsuchen logischer Beweisgründe von Behauptungen, zum Entwickeln rechnerischer und zeichnerischer Methoden."...
Schließlich wurde noch von ethischen und ästhetischen Erziehungswerten gesprochen.
Bei all diesen Erziehungszielen wird die Phantasie des Kindes angeregt.

Neben LIETZMANN sind noch weitere Personen zu nennen, die Ideen der Meraner Reform weitertrugen. Ich erwähne nur A. WALTHER und O. TOEPLITZ. TOEPLITZ als Universitätsmathe-

matiker bemühte sich in ähnlicher Weise wie KLEIN, die Lehre an Hochschule und Schule zu beeinflussen.Er stützte sich in Abgrenzung von den biogenetischen Auffassungen Ende des 19. Jahrhunderts auf ein genetisches Konzept, das sich etwa folgendermaßen beschreiben läßt. "Ich will aus der Historie nur die Motive für die Dinge die sich hiernach bewährt haben, herausgreifen und will sie direkt oder indirekt verwerten." (1927, S. 93). Da die Motive oft Probleme aus Naturwissenschaft und anderen Gebieten waren, bedeutete das, die Mathematik in Verbindung mit außermathematischen Problemen zu entwickeln.
Die Meraner Reform übte bis zum Ausgang der Sechziger Jahre auf das gymnasiale Schulwesen Einfluß aus, bis die Nürnberger Lehrpläne von 1966 einen völlig neuen Ton anschlugen. Viele didaktische Publikationen dieser Zeit beriefen sich auch explizit auf die Meraner Reform. Jedoch zeigte sich mit fortschreitender Entfernung von den Anfängen eine wachsende Aushöhlung des Gedankengutes. Dies läßt sich sehr schön an der von STENDER im Jahre 1961 überarbeiteten Ausgabe der LIETZMANNschen "Methodik des mathematischen Unterrichts" aufzeigen, auf die ich nun eingehen möchte.

In den mathematischen Inhalten unterscheidet sich die STENDERsche Bearbeitung nur unwesentlich von der 1. Auflage. Unter Bezugnahme auf BOURBAKI wird die axiomatisch-deduktive Arbeitsweise auch für den Unterricht als zentrale Arbeitsweise herausgestellt. In bezug zu den Anwendungen ist die STENDERsche Neubearbeitung merkwürdig unausgeglichen. Einerseits stellt STENDER im Vorwort fest, daß die sogenannte Angewandte Mathematik in unserem Zeitalter auch im Bereich der Schule nicht weniger wichtig als die Reine Mathematik sei, andererseits erscheinen in dem gesamten Buch nur wenige Bemerkungen über Anwendungen, die zudem uneinheitlich wirken. Einige Beispiele sollen dies verdeutlichen:
Die wirklichen Anwendungen werden dadurch charakterisiert,

daß sie nicht aus zurechtgemachten Werten bestehen, die glatte Ergebnisse liefern und daß man bestimmte "Werte nötigenfalls durch eigene Beobachtung festzustellen" hat (S. 23). Andererseits lesen wir: "Ist es wirklich Aufgabe der Mathematiker, neben der eigentlichen arithmetischen Aufgabe auch dieses lange Vor- und Nachspiel mit zu übernehmen, hat man nicht vielmehr solcher Erörterungen den jeweiligen Anwendungsgebieten zu überlassen? Wenn wir wirklich in der Schule das Hin und Her zwischen Mathematik und Welt der Wirklichkeit mit in Rechnung ziehen wollen, so ist uns damit das Ziel vorgezeichnet: Aus der Wirklichkeit ist das mathematische Ergebnis wieder in die Welt der Wirklichkeit zu übertragen."
Auf die eben angeführte Frage wird explizit keine Antwort gegeben, da aber das formulierte Ziel auch nicht implizit über Beispiele angesteuert wird, ist anzunehmen, daß die Anwendungen der Naturwissenschaften überlassen werden.

Andererseits sollen Anwendungen für den Mathematikunterricht genutzt werden: "Anwendungen sind für die Mathematik da". (S. 44) Das ist sicherlich ein zu einseitiger Anspruch der Mathematik, und kann dem 1924 formulierten Anliegen nach der Erzeugung eines Beziehungsnetzes zwischen den Schulfächern nicht gerecht werden.

Insgesamt wirken die Darstellungen von 1924 und 1949 ausgewogener.

Kommentar

Die Ansätze der Meraner Reform sind m. E. in dreierlei Hinsicht bedeutsam. Erstens leistete F. KLEIN einen bedeutenden Beitrag zu einer didaktischen Theorie, indem er ein weitgehend konsistentes Argumentationsgefüge für die Beachtung der Anwendungen im Unterricht zusammenstellte. Zweitens erweist sich der Katalog an Maßnahmen die Reformziele institutionell zu verankern als vielschichtig und m. E. auch noch aus heutiger Sicht in ihren Intentionen als vorbildlich.

Drittens ist in dem "Meraner Lehrplan" der Versuch unternommen worden, die Interessen der Naturwissenschaften und der Mathematik aufeinander abzustimmen. In gymnasialen Lehrplänen ist augenblicklich eine solche Koordination nicht mehr zu erkennen.
Auf der anderen Seite ist nicht zu übersehen, daß nicht allen Maßnahmen Erfolg beschieden war: Die Lehrerfortbildungstagungen haben eine zu geringe Anzahl von Lehrern erreicht, als daß sie eine größere Breitenwirkung gehabt haben könnten. Vermutlich sind sie nicht in genügendem Maße auf der konstruktiven Ebene verlaufen, sodaß kein genügend großes Reservoir für Unterrichtsbeispiele angelegt wurde und andererseits auch keine expliziten Anleitungen zur Konstruktion von Unterrichtsbeispielen angesprochen wurden. Auch LIETZMANN konnte diesem Mangel nur teilweise für die Oberstufe abhelfen, während für die Klassen 5-10 keine wesentlichen Beispiele für relevante Anwendungen vorgestellt wurden.Jedoch wies LIETZMANN auf einige Punkte hin, die auch heute in der internationalen Diskussion eine wesentliche Rolle spielen.
LIETZMANN forderte, daß die Stochastik in den Unterricht einbezogen werden soll. Erst in den letzten Jahren hat die Stochastik in größerem Umfang Eingang in die Schule gefunden (vgl. beispielsweise WINTER/ZIEGLER: "Neue Mathematik" Bd. 1-10, ab 1971).
LIETZMANNs Forderung nach der Verzahnung der Fächer korrespondiert mit verschiedenen aktuellen Maßnahmen. Die Aktivitäten des Instituts für Pädagogik der Naturwissenschaften in Kiel gehören dazu ebenso wie die Existenz des Faches Sachkunde. Auch sind die besonders in Englang erhobenen Forderungen nach Projektunterricht und integrierten Curricula so zu sehen. Auch scheint sich LIETZMANN über die lernpsychologische Bedeutung der "Verzahnung" bewußt gewesen zu sein, welche FREUDENTHAL (1973) so ausdrückt:

"Was zusammenhängt lernt sich besser ... . Auch die Mathematik selbst kann nur gewinnen, wenn sie sich die Gelegenheit, sich als nützliches Glied im Kreise der Fachgemeinschaft zu erweisen, nicht entgehen läßt."
Die Beschreibung des Unterrichtszieles der Erziehung zur Anwendung der Mathematik läßt die Grobstruktur als Prozess der Modellbildung erkennen und enthält Einzelaktivitäten, die in diesen Prozess einfließen. (In Kapitel II werden wir uns näher mit diesem Prozess beschäftigen.) Da LIETZMANN die Betonung auf die Entwicklung der Fähigkeit zur Anwendung legt und weniger auf die einzelnen Beispiele, stimmt er mit Forderungen von KRYGOWSKA (1969) und FREUDENTHAL (1973) überein. Wie diese Fähigkeit im Schüler entwickelt werden kann, gehört jedoch heute noch zu den didaktischen Forschungsaufgaben.

1.2 Die Didaktik des traditionellen Sachrechnens

Etwa im gleichen Zeitraum wie die Meraner Reform verlief innerhalb der Volksschuldidaktik unter dem Stichwort "Sachrechnen" eine Strömung, die den Anwendungen des Rechnens eine große Beachtung schenkte. FETTWEIS/SCHLECHTWEG (1965[4], S. 51) sehen im Sachrechnen die Angewandte Mathematik der Volksschule. Eines ihrer Ziele war die Aufdeckung der "zahlenmäßigen Verhältnisse in der Umwelt", wie es KRUCKENBERG (1950[6], S. 365) formulierte. Unter der Umwelt wurden überwiegend Bereiche aus dem unmittelbaren Erfahrungsraum der Kinder verstanden und aus Berufsfeldern, in die später Volksschulkinder eintreten. Das zum Einsatz kommende mathematische Repertoire war auf die vier Grundrechenarten beschränkt. Obwohl auch heute der Terminus "Sachrechnen" auf der Grundschule und Sekundarstufe I allgemein gebräuchlich ist, so ist doch die aktuelle didaktische Diskussion zum Thema "Sachrechnen" im Vergleich zur traditionellen breiter angelegt; u. a. in bezug auf die Einbeziehung weiterer mathematischer Inhalte wie Stochastik und Geometrie sowie durch die größere Vielfalt von Anwendungssituationen.
In 1.5 werden wir darauf eingehen.
Im folgenden wird ein Bild vom traditionellen Sachrechnen entworfen, in dem auf didaktische Arbeiten zurückgegriffen wird, die überwiegend von Dozenten an pädagogischen Akademien oder pädagogischen Hochschulen für den Volksschul-, Grundschul- oder Hauptschullehrer geschrieben wurden. Die dabei entwickelten Vorstellungen betonen in stärkerem Maße die methodische Komponente als die der Meraner Reformbewegung. Es wurde weniger programmatisch und nicht so sehr im System der Mathematik und Naturwissenschaften gedacht. Insbesondere die älteren Autoren der Sachrechnendidaktik versuchten, in einem unmittelbaren Sinne unterrichtswirksam zu werden; durch die Darbietung von Unterrichtsbeispielen und detaillierten methodischen Hinweisen für den Lehrer. Der genetisch-historische Ansatz von

KLEIN wurde nicht angesprochen. Das Genetische kam aber in einer anderen psychologisch-genetischen Weise zum Zug. Ausgehend von realen Situationen sollen mathematische Begriffe entwickelt werden, die später wieder angewandt werden sollen. Diese Sicht des Lernprozesses haben besonders OEHL und KARASCHEWSKI vertreten.
In den folgenden Ausführungen konzentriere ich mich in einem ersten Abschnitt auf die Begründungszusammenhänge für das Sachrechnen und seine Rolle im Rechen- bzw. Mathematikunterricht.
In einem zweiten Abschnitt referiere ich spezielle insbesondere methodische Vorschläge zum Sachrechnen.

1.2.1 Begründungen für das Sachrechnen und seine Rolle im Rechenunterricht

Der Volksschulunterricht nahm sich des Sachrechnens von seinem allgemeinen Auftrag her an. Seit der Aufklärung wurde von der Volksschule immer wieder gefordert, daß sie zu lehren habe, was der Mensch in seinem späteren Lebens- und Berufskreis voraussichtlich einmal brauche. Z. B. setzt OVERBERG (1793) das Ziel "Übet sie (die Schüler) in solchen Exempeln, welche in ihrer eigenen oder ihrer Eltern Umstände und Geschäfte einschlagen."
HARNISCH (1817) sah die Aufgabe des Rechenunterrichts in der "harmonischen Ausbildung aller geistigen Kräfte und zugleich der Geschicklichkeit für das Leben". GOELTSCH und IHELL (1858) wollten den Rechenunterricht an Sachgebieten orientieren wie 1. Zeitmessung, 2. Maße für Dinge und Stoffe, 3. Wertmaße, 4. Erwerb und Gebrauch des Eigentums .... ." [1])
Vorstellungen dieser Art wurden später von Vertretern des Ganzheitsunterrichts neu formuliert: Beispielsweise schreiben W.JUNKER/K. SCZYRBA (1964[2], S. 12) "Es besteht eine so enge Beziehung im Bereich des Rechnens zwischen Leben und Lernen, daß Rechentüchtigkeit die Voraussetzung für Lebens-

---

[1]) Diese historischen Zitate sind BREIDENBACH (1963) entnommen.

tüchtigkeit ist. Rechenunterricht muß lebensbezogen sein. Daraus ergibt sich, daß das Sachrechnen zum Mittelpunkt wird ... ." Das Sachrechnen spielt sich bei SZYRBA in Sachgebieten mit Themen wie "Unser Dorf", "Unsere Wälder", "Erntezeit" usw. ab.
Auch für FETTWEIS und SCHLECHTWEG (1965[4], S. 165) hat die Volksschule den Auftrag, den Schüler "lebens- und berufsfähig" zu machen.
Ähnlich drückt sich W. BREIDENBACH (1963, S. 43) aus: "Allgemein können wir das Ziel des Rechenunterrichts so formulieren: Der Rechenunterricht soll die Grundlagen für eine mathematische Erfassung von Dingen, Erscheinungen und Vorgängen des Lebens legen", und J. KÜHNEL (1925[5] , S. 5) fordert vom Rechenunterricht eine "allgemeine Geistesbildung" und eine Vermittlung der "für das praktische Leben nötigen Kenntnisse und Fertigkeiten ...".

Die Begründung des Rechenunterrichts und besonders des Sachrechnens durch seine berufsvorbereitende Rolle verliert aber bei W. OEHL, H. KARASCHEWSKI, G. LUBOWSKY ihre überragende Bedeutung. Es treten eine Vielfalt anderer oft innermathematischer, lernpsychologischer, kultureller Begründungen hinzu. Zeitlich fällt diese Entwicklung mit der Ablösung der Volksschule durch die Grund- und Hauptschule zusammen, was eine Neuformulierung der Aufgaben der Hauptschule mit sich brachte. Im wesentlichen kommt es zu einer Angleichung der allgemeinen Ziele von Haupt-, Real-, Gesamtschule sowie Gymnasium.

OEHL (1965) führt zwei Gründe für das Sachrechnen in der Schule an:
Erstens könnten die Sachaufgaben "dem umfassenden Ziel des Rechenunterrichts dienen, den Schüler für die Bewältigung der lebenspraktischen Aufgaben fähig zu machen" (S. 116).
Den zweiten Grund sieht OEHL in der zentralen Rolle der "Sachsituation" im mathematischen Lernprozeß.

"Die Einführung in ein neues Rechenkapitel und die sich anschließenden methodischen Stufen stehen in einem Zusammenhang, der didaktisch entscheidend durch seine Sachbezogenheit bestimmt ist." (S. 113) Weiter schreibt OEHL (S. 114): "Entscheidend für den Zusammenhang der didaktischen Stufen (im Lernprozess) ist die Beziehung zwischen 'mathematischem Begriff' und 'Sachsituationen': Auf der Einführungsstufe und bei der Durcharbeitung ist die Sachsituation der Anknüpfungspunkt, auf der Stufe der Übung geht es darum, neben der zu erreichenden rechnerischen Fertigkeit die Einsicht (Beziehung zwischen Begriff und Sachsituation) lebendig zu halten. Auf der Stufe der Anwendung schließlich wird das Erkennen dieser entscheidenden Beziehung zwischen mathematischem Begriff und Sachsituation durch vielfache Variation der Sachsituation geschult."

Diese Zitate machen deutlich, daß für OEHL Anwendungen zum unverzichtbaren Bestandteil des Rechenunterrichts gehören.

Auch bei anderen Autoren werden die Anwendungen fest in den mathematischen Lernprozeß eingegossen: "Aller Rechenunterricht ist Sachrechnen, er geht von der Sache aus und führt wieder zu den Sachen hin ..." (FETTWEIS/SCHLECHTWEG, 1965[4], S. 163); und KARASCHEWSKI (1966, S. 142) schreibt: "Jeder Rechenlehrgang nimmt zunächst Bezug auf konkrete Sachverhalte, die geeignet sind, Anschauungs- und Motivationshilfe für ein bestimmtes Rechenverfahren zu leisten."

Bei LUBOWSKY (1968) kann eine dreifache Einbindung des Sachrechnens in ein didaktisches Konzept von einem Rechenunterricht herausgelesen werden.

Der <u>pragmatische Aspekt</u>: "Rechnen ist Sachrechnen, Sachrechnen Prinzip des Rechenunterrichts der Volksschulen. Die Rechenverfahren rechtfertigen sich durch ihre Instrumentalität für die quantifizierende Sacherschließung." (S. 19)
Der <u>lernpsychologische Aspekt</u>: "Sachrechnen als Prinzip des

Rechenunterrichts wird aber auch den Lernprozeß determinieren, ... (denn) Operationen sollen aus Sachfragen hergeleitet werden, ... Erwerb und Anwendung der Operationen werden sich zu einem einzigen Lehrgang integrieren."
Der Aspekt der Allgemeinbildung: "Bildung impliziert die Frage nach der Mathematik selbst. Es wäre sinnlos, dem Kind die Definition als einer Wissenschaft von Strukturen zu übergeben. Was Mathematik ist, kann das Kind dieser Stufe nur dadurch erfassen, daß es die 'Logik' der mathematischen Gegenstände, die es beherrschen lernt, begreift, sich der Instrumentalität seines rechnerischen Könnens bewußt wird und das 'Wesen' der Mathematik vor dem Hintergrund dieser Einsicht 'erahnt'." (S. 16)

1.2.2 Methodik des Sachrechnens

Die Didaktik des traditionellen Sachrechnens hat eine Reihe von zum Teil gegenläufigen Vorschlägen entwickelt, wie Anwendungen aufgegriffen und dem Kind präsentiert und wie Schwierigkeiten umgangen werden sollen.

Mehrere Autoren geben Regeln an, die bei der Formulierung der Aufgaben beachtet werden sollen.
BREIDENBACH (1963, S 197-199) fordert, daß keine offenen Probleme gestellt werden: "Die Aufgaben sollen grundsätzlich die Frage mit enthalten, da diese die unbekannte Größe benennt." Außerdem sollen nur Hauptsätze verwendet werden, auftretende Personen mit Namen benannt werden, der Sachverhalt in seiner natürlichen Reihenfolge aufgeführt werden und nur dem Kind vertraute Sachverhalte geschildert werden. Ähnliche Anleitungen geben OEHL (1965, S. 116-118) und FETTWEISS/SCHLECHTWEG (1965[4], S. 206-207).

Bezüglich der fertig formulierten Fragestellung weichen sie jedoch von BREIDENBACH ab. OEHL will die Frage nur angeben, wenn diese nicht eindeutig aus dem Sachverhalt hervorgeht.

FETTWEISS/SCHLECHTWEG sehen das Problem der Fragestellung vielschichtiger. Neben fertig ausformulierten Aufgaben müssen auch solche ohne Fragestellung stehen, da dies den Schüler veranlaßt, den Sachverhalt zu durchdenken, was "wesentlich zur geistigen Entwicklung des Schülers" beiträgt; außerdem ergibt sich für den Erwachsenen im täglichen Leben die Aufgabe, "einen Sachverhalt nach mehreren Seiten hin zu durchdenken, verschiedene Fragen zu formulieren und den Sachverhalt entsprechend zu erfassen".

In KÜHNELS (1925[5]) Didaktik ist das Problem der Fragestellung ein zentraler Punkt. Nichts ist so wichtig "für alle intellektuelle und ethische Bildung, als daß das Kind sich selbst Aufgaben stellen, selbst Probleme suchen, finden, formulieren und zerlegen lerne". (S. 218). KÜHNEL erwartet daher von den Schulbüchern, daß ein großer Teil der "angewandten Aufgaben keine Problemfragen enthalten wird, und dazu unvollständige Angaben". (S. 220).
Zur Konkretisierung seiner Vorstellungen gibt KÜHNEL eine Reihe von Aufgaben (S. 204-205) an. Beispielsweise für das erste Schuljahr: "Der Vater gibt dir einen Pfennig, nun kannst du einen Fünfer wechseln".
Für die 8. Klasse: "Durch Überstunden erzielt ein Geselle einen täglichen Nebenverdienst von 1,20 DM. Wieviel betrug dieser in einer Woche." An diesem Beispiel verdeutlicht KÜHNEL,wie verschiedene Fragestellungen angeschlossen werden können und fehlende Angaben beschafft (erfragt) werden sollen.
KÜHNEL sieht im Sachrechnen nicht die großen Schwierigkeiten für die Schüler wie viele andere Autoren. FETTWEIS/SCHLECHTWEG wollen nach der Behandlung einer neuen Operation an "reinen Rechenfällen" einfache Sachaufgaben anschließen, die mit dieser Operation gelöst werden. Um eine zu befürchtende blinde Anwendung einer Operation zu vermeiden, sollen mit Fortschreiten des Unterrichts Aufgaben eingestreut werden,

die mit anderen Operationen gelöst werden.

LUBOWSKY (1968, S. 144-146) möchte "behutsam die Schwierigkeiten, die im Sachrechnen liegen, steigern". Er unterscheidet vier Bereiche, in denen die Schwierigkeiten variiert werden können.

- Die "Darstellung des Sachverhalts" in einer Textaufgabe kann eventuell in Spielhandlungen nachvollzogen werden, ausführlich mündlich erläutert werden oder man beläßt es bei der vorliegenden schriftlichen Form.
- Die "Kompliziertheit des Sachverhalts" kann gesteigert werden, wenn mehrere Operationen zur Lösung benötigt werden.
- "Angebot an Lösungshilfen" kann variiert werden.
- Die "Vertrautheit des Sachverhalts" kann variiert werden.

KARASCHEWSKI (1969[2], S. 140 ff) formuliert u. a. zwei Vorschläge, die geeignet sind, dem Schüler eigentätig über Schwierigkeiten beim Sachrechnen hinwegzuhelfen. Der Grundgedanke ist, daß dem Schüler die Möglichkeit gegeben werden muß, sein Wissen variabel anzulegen. Hierzu hat KARASCHEWSKI das Prinzip der Realvariation formuliert. Es besteht darin, daß eine bestimmte Gedankenfolge (im Sinne eines Lösungsschemas) an verschiedenen Sachsituationen gewonnen wird und anschließend in weiteren verschiedenen Situationen angewendet und wiedererkannt werden soll. Dabei ist es wichtig, daß einerseits Situationen aus dem Bereich der Wirklichkeit, aber auch nur mögliche Situationen und gar unmögliche Fälle behandelt werden.
KARASCHEWSKI sieht in dieser Tätigkeit etwas typisch Mathematisches: "Von Anfang an hat die Arithmetik bei der Sachwirklichkeitsbetrachtung für das geistige Auge eine Art Weitwinkelobjektiv zu sein. Zu jeder Tätigkeit und zu jeder Aufgabe gibt es einen Generalisierungsbereich. Der berechtigte

Ehrgeiz der Mathematiker besteht darin, diesen so weit wie nur irgend möglich auszudehnen ... . Auf dem Wege einer Realvariation kann zusammengeführt werden was in der Wirklichkeit weit auseinanderliegt."
Und weiter: " Wer sich von vornherein auf die durchschnittlichen Alltäglichkeiten festlegt wird möglichkeitsblind."
Diesem Prinzip der Realvariation, bei dem das mathematische Lösungsschema unverändert bleibt, wird ein Aufgabentyp gegenübergestellt, bei dem bestimmte situative Schlüsselworte wie sparen, ausgeben usw. vorgegeben werden, zu denen verschiedene Situationen und Textaufgaben vom Schüler entwickelt werden sollen, deren Lösung dann oft unterschiedliche mathematische Werkzeuge erfordern.
In diesem Zusammenhang soll noch angeführt werden, in welchen Bereich mathematische Begriffe angewendet werden sollen und welche Bereiche als Ausgangsbasis für die erste Aneignung der mathematischen Begriffe dienen und wie diese Bereiche dem Schüler nahegebracht werden.

KARASCHEWSKI (1970, S. 49) betont einmal den Bereich der Berufe, den die Kinder selber erkunden und in der Schule nachspielen sollen. Dies kann im Heimatkundeunterricht geschehen. Anschließend soll eine "Typisierung" z.B. eines Bäckerladens in Form eines Bildes vorgegeben oder vom Kind erstellt werden, worauf dann die in dem Bild gebotenen Daten das Kind zu Frage und Rechnungen anregen sollen.

Eine besondere Rolle spielen bei KARASCHEWSKI (1966, S. 103-106) die Bilder am Anfang eines Lernprozesses in der Grundschule. Sie werden vom Lehrer angefertigt und sollen die Vorliebe kleiner Kinder für Tiere, für das Bunte, für den Komplex "Haus", für den "Verkehr", für das "Geld" berücksichtigen. Solche Bilder müssen nicht im Sinne einer Photographie ein direktes Bild der Realitäten sein, vielmehr können sie "in didaktischer Absicht aufgeladen, typisiert und idealisiert"

sein. Sie sollen dramatisieren, kontrastieren, ästhetisieren und einen Augenblick aus einer Handlung fixieren. Es geht hier nicht darum, einen Ausschnitt der Realität möglichst genau darzustellen, vielmehr soll der Lehrer ein Bild entwerfen, das mit Elementen aus dem Erfahrungsbereich des Kindes angereichert ist. KARASCHEWSKI benutzt hier das Wort von der "natürlichen Künstlichkeit".

In den Bildgeschichten von KARASCHEWSKI ist das Problem der Realitätsnähe des Sachrechnens bereits angesprochen. Sollen nun die Sachaufgaben echte Situationen aus dem Alltag und Berufsleben sein?
OEHL (1965, S. 119) fordert: "Die Sachaufgaben müssen nach ihrer Situation lebensecht und nach ihren Zahlenangaben lebenswahr sein." Er schränkt jedoch ein, daß die Schule dieser Forderung nicht genügen kann, da "der Ernstfall des Erwachsenen oder beruflichen Lebens dem Kinde weitgehend fremd ist. ...

Wir sind also gezwungen zu reduzieren, zu vereinfachen und zu elementarisieren. Dann sind unsere Aufgaben aber nicht mehr lebenswahr und lebensecht, sondern im günstigsten Falle lebensnahe." Eine ähnliche Auffassung vertreten FETTWEIS/SCHLECHTWEG (1965, S. 205).

Im Gegensatz zu dieser Ansicht steht LUBOWSKY (1968). Er fordert u.a. echte Anwendungen."Die Welt des Rechenunterrichts darf also nicht eine für mathematische Operationen zugerichtete Welt sein, deren Meß- und Zahlverhältnisse der empirischen Nachprüfung nicht standhalten." Hieraus ergibt sich, daß neben den üblichen Textaufgaben "Sachverhalte angeboten werden, die ohne Quantifizieren und Rechenfrage dem Kind angeboten werden ..."

Einen in der Literatur selten angesprochenen Punkt erwähnt LUBOWSKY (1968, S. 133-134). Er stellt fest,daß die Aufgaben in der Schule unter mangelndem "Ernstcharakter" lei-

den müssen, da die errechneten Ergebnisse nicht wirklich das Verhalten des Kindes beeinflussen, während die Lösungen der "Rechenfragen, die der Mensch sich in der Wirklichkeit des Lebens stellt - sein Verhalten real beeinflussen". Dieser Mangel soll dadurch ausgeglichen werden, daß das Ergebnis befragt wird, was daraus für den Mensch folgt, hätte er sich diese Aufgabe gestellt.

Abschließend soll noch erwähnt werden, inwieweit in der Didaktik des Sachrechnens der Vorgang des Modellbildens einmal in seiner Grobstruktur als Pendelbewegung zwischen einer Sachebene und der mathematischen Ebene erkannt wird und inwieweit dieser Vorgang eine Feingliederung erfährt, etwa im Sinne des in Kapitel II dargestellten neunschrittigen Schemas.

OEHL (1962, S. 14-18) unterscheidet am deutlichsten von den bisher zitierten Autoren die "abstrakt mathematische Ebene" einerseits und die "Realebene, Welt der Sachdinge" andererseits. Dieses zwei Ebenen umfassende Schema wird benutzt, um das "formal-systematische Denken", das auf den höheren Schulen verbreitet sei, mit dem "sachnahen Denken" der Volksschule zu vergleichen. Letzteres zeichnet sich aus durch "konkret anschauliches Tun in der Sachsituation - Übergang zum Zahlenrechnen und zur Rechenfertigkeit - mathematische Einsicht in andere Sachsituationen".

LUBOWSKY (1968, S. 36-38) gibt eine Feingliederung an. Er nimmt sie zur Beschreibung der "Struktur des sachrechnerischen Denkens". Sieben Schritte werden unterschieden:

"1. Die Einsicht, daß die gestellte Aufgabe des Rechnens bedürfe, und der Entschluß sich des Rechnens zu bedienen,

2. Vergegenwärtigung oder Erkundung des dieser Aufgabe zugrundeliegenden Sachverhalts,

3. Präzisierung der Rechenfrage, also jener Frage, die

sich durch Rechnen beantworten läßt,

4. Suchen des Operationsansatzes, der die Beantwortung der Rechenfrage ergibt.

5. Feststellung der für die Ausführung der Rechnung benötigten Größen und Aufdecken des operativen Zusammenhangs zwischen diesen Größen.

6. Der Operationszusammenhang wird in Rechenverfahren "übersetzt", welche die Ausführung der Operationen ermöglichen; die Rechenverfahren werden ausgeführt und ihre Ergebnisse kontrolliert.

7. Das Ergebnis wird hinsichtlich des zukünftigen Verhaltens interpretiert."

Meines Wissens wurde hier zum ersten Mal in der Didaktik des Sachrechnens der Versuch unternommen, den Vorgang des Anwendens von Mathematik in allgemeinen Worten darzustellen. Jedoch wurden die Ansätze von OEHL und LOBOWSKY in der Didaktik des Sachrechnens nicht fortgeführt.
Dies gilt nicht nur für diesen Gesichtspunkt: Betrachtet man die Entwicklung der didaktischen Veröffentlichung um die siebziger Jahre, wie sie sich beispielsweise in den "Beiträgen zum Mathematikunterricht" niederschlagen, so drängt sich der Eindruck auf, daß mit den Arbeiten von OEHL (1965), KARASCHEWSKI (1966) und LUBOWSKI (1968) didaktische Darstellungen zum traditionellen Sachrechnen ihr Ende gefunden haben. Die Entwicklung in den folgenden Jahren war gekennzeichnet durch einen plötzlichen und radikalen Bruch mit traditionellen Vorstellungen und das Eindringen der "Neuen Mathematik". Reformideen, die an der Tradition anknüpfen, werden kaum gehört. U. a. ist charakteristisch, daß Anwendungen eine untergeordnete Rolle spielen. Hier sind Parallelen zur Entwicklung im gymnasialen Bereich zu sehen.

Kommentar zum traditionellen Sachrechnen

Eine der Leitideen der Volksschuldidaktik bestand darin, den Lernvorgang unter Beachtung der Vorerfahrungen der Schüler und der Anwendungen zu organisieren. Es ist das Verdienst vor allem von OEHL und KARASCHEWSKI, sich mit der theoretischen Ausgestaltung dieses genetischen Ansatzes beschäftigt zu haben. Jedoch werden u. a. bei OEHL gewisse Einseitigkeiten erkennbar: OEHL bindet in seinen Ausführungen den Lernvorgang zu stark an reale Situationen, die Möglichkeit der Anknüpfung des Lernprozesses an innermathematische Probleme wird kaum berücksichtigt. Es ergibt sich eine zu ausgeprägte Kongruenz zwischen dem zu erarbeitenden mathematischen Begriff und der realen Ausgangssituation; es wird nicht berücksichtigt, daß reale Situationen mit verschiedenen mathematischen Begriffen adäquat angegangen werden können, so daß es sich nicht nur darum handeln kann, "daß der Schüler die in der Sachsituation der Aufgabe verborgene mathematische Beziehung entdecken muß", sondern vielmehr der Situation eine mathematische Modellvorstellung aufprägt. OEHL unterstreicht seine Auffassung, indem er schreibt, daß "es sich bei der Anwendung nicht um eine Aufprägung, sondern um eine Ausprägung des Mathematischen aus der Sachsituation heraus" handelt. "Aus der Sachsituation heraus wächst die zunächst verborgene mathematische Gestalt..." (S. 115).

Dieser Aspekt der Anwendung hat auch seine Berechtigung und trifft vor allem bei einfachen Situationen zu. Jedoch darf der Aspekt der Aufprägung nicht übersehen werden. Bei komplizierten Situationen wird er sogar überwiegen.

Das Problem, in welchem Maße und wie dem Schüler Anwendungen präsentiert werden sollen, hat zu unterschiedlichen Einschätzungen geführt: KÜHNEL vertritt die Idee von der Behandlung offener Probleme am deutlichsten. Er hat wohl zum ersten Mal in der deutschen Didaktik den Grundgedanken zu einem Mathematikunterricht ausgesprochen, der es gestattet, wirklichkeitsnahes Sach-

rechnen zu betreiben, das unverkürzt den Modellbildungsvorgang erfordert und dem Kind ein hohes Maß an Eigenaktivität zuweist.
Andere Autoren sehen in der Behandlung offener Probleme und echter Anwendungen unüberwindliche Schwierigkeiten.
BREIDENBACH lehnt offene Problemstellungen ab und FETTWEIS/SCHLECHTWEG bevorzugen im Gegensatz zu"lebensechten" Aufgaben nur "lebensnahe" Sachaufgaben, die nicht die volle Realität wiedergeben. Dadurch wird den Schülern der Modellbildungsvorgang nicht in vollem Umfang abverlangt; außerdem ergibt sich die Gefahr, daß Kinder ein vereinfachtes Bild von den Anwendungen der Mathematik bekommen.
Die von KARASCHEWSKI angebotenen Bildergeschichten stellen einen Kompromiß zwischen KÜHNELs und BREIDENBACHs Forderung dar. Einerseits müssen Schüler selbständig Fragen entwickeln, andererseits sind die zur Behandlung der Frage notwendigen Daten dem Bild i. a. leicht zu entnehmen. Der Modellbildungsvorgang wird also erleichtert, ist aber im wesentlichen voll zu durchlaufen. Das Kind hat also die Möglichkeit, sich auf den schwierigen Fall der Bearbeitung einer realen Problemsituation vorzubereiten.
KARASCHEWSKI gibt in seinem Prinzip der Realvariation eine interessante Sicht zur Rolle erworbener mathematischer Fähigkeiten: Ihre Bedeutung geht über ihre Wirksamkeit in aktuellen Situationen hinaus auf die Anwendbarkeit in später vielleicht möglichen Fällen. Die Sicht der Mathematik als Wissenschaft von potentiellen Modellen deutet sich hier an.
In der didaktischen Konzeption von LUBOWSKY finden sich u. a. drei Ideen,die von ihrer Intention und z. T. in ihrer Ausführung modern wirken und heute zum festen Bestand der Diskussion um anwendungsorientierten Mathematikunterricht gehören.
-LUBOWSKY bemüht sich um eine Zerlegung des Prozesses des Anwendens von Mathematik in Einzelschritte.
-Die Einbeziehung der Anwendungen in den Mathematikunterricht

wird aus der Aufgabe der Schule begründet, dem Wesen der Mathematik gerecht zu werden.

-Echte Anwendungen, die für den Schüler Ernstcharakter haben, sollen behandelt werden.

Aus Mangel an entsprechenden Beispielen schlägt LUBOWSKY vor, entsprechende Aufgaben auf ihre Bedeutung hin zu befragen. Dieses Vorgehen kann meines Erachtens nur als flankierende Maßnahme angesehen werden. Vielmehr stellt sich die didaktische Aufgabe, Situationen bereitzustellen, die auch für das Kind "Ernstcharakter" bekommen, indem sie sein Handeln beeinflussen können.

Neben den eben erwähnten positiv zu bewertenden Leistungen sind noch eine Reihe kritischer Anmerkungen zur Didaktik des traditionellen Sachrechnens zu machen. Folgende von WINTER (1976 c, S. 338) genannten Punkte scheinen mir besonders wichtig:

-"es gab eine ausschließliche Beschränkung auf Rechenfälle des Lebens, die (direkt) mit den 4 'Grundrechenarten' zu lösen waren." Diese Einschränkung wirkte sich nachteilig auf die Vielfalt der zu mathematisierenden Situationen aus und ist auch aus innermathematischen Erwägungen nicht befriedigend.

-"Fragen des 'richtigen' Anschriebs und der 'richtigen' Sprechweise standen über Gebühr im Vordergrund."

-"Vorherrschend waren Text und Rechnung." Eine Armut an verschiedenen Darstellungsformen war zu beobachten.

-"Schließlich litt das Sachrechnen unter der von der Rechendidaktik selbst verhängten Distanz, ja Feindseligkeit gegenüber mathematischen Methoden und Begriffsbildungen."

Weiter ist - trotz der Ansätze von OEHL und LUBOWSKY - ein Mangel an erkenntnistheoretischen und methodologischen Untersuchungen zum Phänomen Anwendungen festzustellen.

1.3"Here is a situation - think about it", eine Konzeption aus dem englischsprechenden Raum

Wir wollen uns nun einer Richtung in der englischsprachigen Literatur zuwenden, in der es insbesondere um folgende vier Gesichtspunkte geht:

1. Der Modellbildungsvorgang soll ausführlich dargestellt und durch ansprechende Beispiele unverkürzt in den Unterricht eingebracht werden.
2. Echte Anwendungen aus den verschiedenen Bereichen sollen im Unterricht behandelt werden.
3. Es werden Projekte vorgeschlagen sowie Gedanken zur Integration bzw. Kooperation von Mathematik und Naturwissenschaften angestellt.
4. Die Beziehungen zwischen Reiner Mathematik und Anwendungen werden auf erkenntnistheoretischer Basis betrachtet.[1)]

Die von mir herangezogenen Aufsätze stammen hauptsächlich aus den Zeitschriften "Mathematics Teaching", "Arithmetic Teacher", "Educational Studies", "International Journal of Mathematical Education in Science and Technology", und den Konferenzberichten der "Cambridge Conference on the Correlation of Science and Mathematics in the School" (1967) sowie der Utrechter Konferenz "How to teach Mathematics so as to be useful" (1969). Von letzterer sind die Vorträge als Einzelaufsätze erschienen. Die von einzelnen Autoren geschriebenen Aufsätze betonen meist eine der vier Aspekte, ohne jedoch die anderen zu vernachlässigen.

Integration von Mathematik und Naturwissenschaften

In dem 1969 erschienen Kongreßbericht mit dem Titel "Goals for the Correlation of Elementary Science and Mathematics" der "Cambridge Conference on the Correlation of Science and Mathematics in the School", die im Jahre 1967 stattfand, wurden Ideen zur Konstruktion eines integrierten Mathematisch-

---

1) Dieser Punkt wird erst in Kapitel II ausführlich behandelt.

Naturwissenschaften Curriculum entwickelt. In einem allgemeinen Teil enthält der Kongreßbericht Erziehungsziele, die in dem Curriculum angesprochen werden sollen; in einem zweiten Teil werden Unterrichtsthemen vorgeschlagen. Der Kongreß hat sich auf die Elementary School konzentriert, weil dort die Vielfalt der Fächer noch nicht so groß ist, und somit ein integriertes Curriculum leichter zu verwirklichen ist. Das oberste Erziehungsziel ist, die "Schüler zu produktiven Gliedern der Gesellschaft" zu machen (S. 4).

Der Unterricht soll sich dadurch auszeichnen, daß ein großer Teil der Mathematik motiviert und erarbeitet wird im Kontext von Unterrichtseinheiten, die um reale Objekte und realistische Probleme gebaut sind (vgl. S. 29).

Unter den realen Objekten sind nicht die von DIENES entworfenen Materialien gemeint, denn "solches Material wird das Kind (zwar) motivieren und ihm helfen, mathematische Ideen zu verstehen, aber sie werden es nicht in einen breiten Kontakt mit dem Vorgang des Forschens und dem täglichen Leben bringen". Mit anderen Worten soll der Schüler nicht so sehr mit einer eigens für die Schule konstruierten Wirklichkeit konfrontiert werden, sondern mit einer Wirklichkeit, auf die er auch außerhalb der Schule trifft.

Dieser Umgang mit der Wirklichkeit kann nicht in einem Unterricht erfolgen, der von einer Textaufgabe zur nächsten hastet. Der Schüler benötigt Zeit, um sich in Probleme einzuleben und sie nach seinen Vorstellungen auszuforschen. Das hat zur Folge, daß "jede mathematisch-naturwissenschaftliche Einheit ein Projekt" (S. 31) enthält.

Projektthemen sind etwa Sonnenstandsbeobachtungen über ein Jahr hinweg (zugehörige Beobachtungsgeräte werden selbst gebaut); Vielflächner; Anlage von Autobahnkreuzen; Einrichten eines Aquariums usw.

Die Einbeziehung von Projekten erfordert schulbauliche Voraussetzungen (S. 30): Experimentierräume müssen in genügender Zahl vorhanden sein und Räume, in denen das in Arbeit befindliche

Material aufbewahrt wird. Auch die Rolle des Lehrers wandelt sich: "He gives no answer and he has to handle an ambiguous and open-ended situation".

Eine zentrale Rolle im mathematisch-naturwissenschaftlichen Curriculum spielt die Idee des Modellbildens: "The way in which observation and reason are brought to bear on everyday as well as technical problems is through the vital process of constructing simplified conceptual models for real-world objects and interactions. Such modeling begins with the real-world objects and interactions; from them it abstracts simplified conceptual entities and relations among them. Our ability to manipulate or calculate the model entities permits prediction and control of the behavior of the real objects. This critical interplay of the actual and the abstract means that the essence of modeling is a combination of science and mathematics." (S. 16)

Das mathematisch-naturwissenschaftliche Curriculum soll alle Beziehungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaften ansprechen. Es werden fünf Formen der Beziehungen unterschieden: "Mathematik für Mathematik, Mathematik für Naturwissenschaft, Mathematik und Naturwissenschaft, Naturwissenschaft für Mathematik, Naturwissenschaft für Naturwissenschaft" (S. 19).

Die dritte Form der Beziehungen sieht COULSON u. a. im Verhältnis der modernen Chemie zur Mathematik verwirklicht: Mathematik und Chemie sind Partner geworden. Dieses Verhältnis soll auch im Unterricht erkennbar werden.

B. DUDLEY (1975) sieht in diesem partnerschaftlichen Verhältnis von Mathematik und Naturwissenschaft den Kern integrierter Kurse. Er fordert einen Unterrichtsgang, bei dem ausgehend von Situationen eine Mathematik entwickelt wird, die wiederum auf diese Situation angewendet, zu neuen Erkenntnissen über diese Situation führen soll.
Das Beispiel "Teaching Size and Form in Biology" (DUDLEY, 1971) illustriert das partnerschaftliche Verhältnis. Einerseits wer-

den Beziehungen zwischen Größe, Volumen und Kraft der Tiere beim Wachstum hergestellt, andererseits ergibt sich die Betrachtung der Strahlensätze.

Offene Situationen und Projekte

Ähnlich der Cambridge Konferenz von 1967 schenken POLLAK, PAPERT und DUDLEY der Bearbeitung offener Situationen und Projekte besondere Beachtung.

H. O. POLLAK (1968) beschreibt drei in Schulen anzutreffende Unterrichtsstile zur Einleitung von Schüleraktivitäten.

1. Überwiegend werde dem Schüler eine Frage gestellt, die er beantworten soll.
2. Breiteren Raum nimmt die Schüleraktivität ein, wenn er im Stile "Here is a problem, solve it" angesprochen wird.
3. Jedoch viel zu selten wird der Schüler im Stile "Here is a situation, think about it" angesprochen. Dieser Stil sollte gepflegt werden, weil er geeignet ist, die offene und konstuktive Natur der Reinen und Angewandten Mathematik zu erfassen (S. 26).

POLLAK sieht in der Durchführung eines solchen Unterrichts drei Schwierigkeiten (S. 28).

Erstens: Schüler wissen wenig über Gebiete, in denen Mathematik angewendet wird.
Zweitens: Lehrer wissen zu wenig über Anwendungsgebiete.
Drittens: Die Lehrer sind es nicht gewohnt, so zu unterrichten. Gemeint ist ein Unterrichtsstil, bei dem der Schüler einen Freiraum für die Beschaffung von Daten und die Entwicklung eigener Lösungsansätze hat.

In ähnlicher Weise wie POLLAK geht FLETCHER (1968, S.167) auf die Schulsituation ein. Der vorherrschende Unterrichtsstil wird kritisiert, weil die Schüler Verfahren auswendig zu lernen haben, die sie dann in "sorgfältig präparierten Beispielen" anwenden müssen. Vielmehr sollen Schüler "ursprüngliche Probleme bearbeiten, welche Initiative erfordern

und die kaum gelöst werden können, wenn nur nach Regeln vorgegangen wird." Die Situationen müssen offen sein.
Ich möchte an dieser Stelle auf einen Aufsatz von S. PAPERT (1972) hinweisen. Nicht so sehr, weil PAPERT dort echte Anwendungen betreibt, sondern weil mit dem Aufsatz die Möglichkeiten besprochen werden, die in besonderer Weise durch den Projektunterricht angesprochen werden.
PAPERT stellt dar, wie durch den Projektunterricht die Voraussetzungen geschaffen werden, daß Kinder qualitativ gleiches tun wie Mathematiker: In Projekten haben die Kinder die Zeit, sich mit dem Thema zu identifizieren, Strategien zu entwickeln und abzuwägen - eigene Vorstellungen über längere Zeit zu verfolgen, Fehler zu machen und aus ihnen zu lernen, eine Sprache zur Beschreibung der Probleme zu entwickeln und mit anderen darüber zu sprechen. Projektunterricht erfordert die Eigenaktivität des Schülers. Er soll dem Schüler "lebende Erfahrungen im Mathematisieren geben".

Echte und unechte Anwendungen

In einem 1969 erschienen Aufsatz, in dem POLLAK die in Schulbüchern angegebenen Anwendungsaufgaben klassifiziert, beschreibt er, wodurch sich die echten Anwendungen auszeichnen, insbesondere gegenüber "Wortproblemen" und "unmittelbaren Anwendungen", die beispielsweise beim Einkaufen eintreten.

Dem Schüler stellt sich eine echte Anwendungssituation undeutlich und ungeordnet dar. Die Situation enthält von vornherein keine Fragen. Der Schüler muß erst die Situation verstehen lernen und kann dann versuchen, ein sinnvolles Problem zu formulieren. Diese Tätigkeit fällt bei den Wortproblemen meist weg. POLLAK (S. 339) mißt dieser Tätigkeit eine große Bedeutung bei, weil das der Kern("real truth") echter Anwendungen ist, und weil die "Formulierung eines echten Problems in einer außermathematischen Situation ebenso sehr kreative Arbeit ist, wie die Entdeckung von Mathematik". Ähnlicher Ansicht sind FORD/HALL (1970, S. 82) "Modellbilden ist eine

Form kreativer Arbeit."
Aus einem weiteren Grund sind wirkliche Anwendungen bedeutsam. Die Konstruktion des mathematischen Modells ist komplizierter als bei den "Wortproblemen", wo es sich meist um eine direkte Übersetzung der Geschichte in mathematische Ausdrücke und die Anwendung von Standarttechniken handelt (S. 398).
Auch B.FORD/G. HALL (1970) unterscheiden zwei Arten der Anwendungen. Einmal die Anwendung der Elementarmathematik in Alltagssituationen, wo es keine Schwierigkeiten gibt das Problem zu formulieren, noch die Antwort zu interpretieren. Außerhalb der alltäglichen Anwendungen bestehen darin aber die Schwierigkeiten. Der Schüler sollte auch genügend komplexe Situationen modellieren. FORD/HALL weisen in diesem Zusammenhang auf die Rolle des Computers als angemessene Lösungshilfe hi

Modellbilden

Dem Prozeß des Modellbildens wird als dem grundlegenden Geschehen beim Anwenden von Mathematik im englischsprachigen Raum besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Über diesen Vorgang besteht im wesentlichen Einvernehmen. Er wird meist als mehrschrittiger Prozeß charakterisiert, wobei die verschiedenen Autoren unterschiedliche Schwerpunkte setzen.

J. BAUSOR (1974, S. 41) beschreibt den Modellbildungsprozeß als einen Vorgang, dessen einzelne Schritte streng getrennt auf zwei Ebenen ablaufen: der "beobachtbaren Welt" und der "Modellebene".

Dieser Gedanke spielt in einem Aufsatz von P. HILTON (1974), in dem auf mehrere Aspekte zum Thema Anwendungen eingegangen wird, eine wichtige Rolle. HILTON beschreibt den Vorgang des Anwendens in sieben Schritten und betont drei Punkte besonders.
Erstens: Die einzelnen Schritte sind vielfach rückgekoppelt (vgl. auch BAKER, 1971). Bei jedem neuen Schritt sollte man die zurückliegenden Schritte im Auge haben (S. 445). Beim Modellbilden wird versucht, Modelle zu entwickeln, die immer

besser die Realität beschreiben.

Zweitens: "Ich finde es sehr wichtig, daß Mathematikstudenten etwas von der Komplexität des Problems der Datenbeschaffung verstehen" (S. 445).

Drittens: Es handelt sich hier um den siebenten Schritt beim Modellbilden, der jedoch nicht immer eintritt:
"Angenommen, man ist zu einer Lösung gekommen und bezieht sich wieder auf das ursprüngliche Problem. Es stellt sich heraus, daß sie dem ursprünglichen Problem nicht gerecht wird, dann sucht man nach einem Problem, für das sie die richtige Lösung ist" (S. 446). Dies ist ein ökonomisches und durchaus heuristisches Vorgehen, denn einmal Erworbenes soll weiter verwendet werden.

Der Gedanke der Interpretation oder des Rückbezugs der Lösung auf die reale Situation und die Diskussion der Grenzen des Modells unterstreicht nochmals, daß beim Modellbilden auf zwei Ebenen gearbeitet wird (siehe hierzu auch HEATON, 1970).

Wegen seiner grundsätzlichen Bedeutung für die Anwendungen aber auch in der reinen Mathematik will HILTON den Modellbildungsvorgang explizit mit Studenten besprechen. Diese Idee wird auch von anderen Autoren angedeutet. FORD/HALL (1972) und ebenso WALLIS (1971), RAY (1974), HOPE/ROTHERY (1975) sehen darin eine Strategie, die die Schüler beim Problemlösen einsetzen, wenn es um die Bearbeitung neuer und ungelöster Problemsituationen geht. (Anmerkung: Das kann nicht bedeuten, daß der Modellbildungsprozeß algorithmischer Natur ist.)

Das Ziel, nämlich das Grundsätzliche und von speziellen Situationen Unabhängige, also die Methodologie des Modellbildens herauszuarbeiten, wird schon in einem älteren Aufsatz von SCORER (1964) herausgestellt:
Die Mathematikstudenten sollen durch die Bearbeitung verschiedener realer Problemsituationen eine Vorstellung davon gewin-

nen, was beim Anwenden von Mathematik wirklich geschieht.

HILTON geht auch auf das Problem der Lehrerbildung ein. Er macht das schlechte Ansehen der Angewandten Mathematik dafür verantwortlich, daß an Universitäten wenig echte Anwendungen betrieben werden. Dieses Ansehen habe keine Berechtigung, wenn ernsthaft Anwendungen betrieben werden, "denn dann wird unsere Aufgabe als Mathematiklehrer eher schwieriger als leichter. Es ist am einfachsten, einen schlechten angewandten Mathematiker auszubilden. Das nächst einfache wäre die Ausbildung eines schlechten reinen Mathematikers. Dann kommt ein Quantensprung bis zu der Aufgabe, einen guten reinen Mathematiker auszubilden und schließlich ein riesiger Quantensprung bis zur Ausbildung eines guten angewandten Mathematikers" (S. 437).
Diese Schilderung kann m. E. auf den Schulunterricht übertragen werden.

Einen weniger beachteten Aspekt greifen J. HYSLOP/R. LEWIS (1971) auf. Sie fordern, daß an einer Stelle die Flexibilität und der Allgemeinheitscharakter der Mathematik dadurch herausgearbeitet wird, daß Situationen aus verschiedenen Bereichen mit gleichen mathematischen Modellen bearbeitet werden.

Beachtet man die Beispiele, die von den verschiedenen Autoren zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht vorgestellt werden, so stellt sich heraus, daß die oben angesprochenen drei Punkte durchgehend im Unterricht von der Grundschule bis zur Hochschule bedeutsam sind.
Beispiele: TAMMADGE (1971) behandelt in der Elementary School das Thema: "How much does it cost to keep a dog?" KNOWLES (1971) schlägt für den Mittelstufenunterricht einen Vergleich zwischen zwei Methoden zum Hochhausbau vor. Für den Oberstufenunterricht ist eine Frage von POLLAK (1969) geeignet: "Wieviele verschiedene Stücke sollte man zulassen, um an der Expresskasse im Supermarkt abgefertigt zu werden?"

Kommentar

Betrachtet man den Personenkreis, der diese Strömung trägt, so ist er mit Mathematikern, Didaktikern und Lehrern breit gefächert. Entsprechend vielfältig sind auch die Beiträge. Trotzdem hängen die einzelnen Beiträge eng zusammen. Dies ergibt sich fast zwangsläufig, denn der von allen Autoren vertretenen Forderung nach der Behandlung echter Anwendungen aus verschiedenen Bereichen kommt m. E. bei der Diskussion um Anwendungen eine Leitfunktion zu. Seine Verwirklichung zieht die Verwirklichung der anderen eingangs erwähnten Punkte nach sich: Echte Anwendungen erfordern immer einen unverkürzten Modellbildungsvorgang, sind teils nur in Projekten anzugehen und erfordern die Mitarbeit anderer Fächer.

Die erwähnten vier Punkte sind wesentliche Bestandteile eines umfassenden Ansatzes einer Didaktik zur anwendungsorientierten Mathematik. Diese Punkte sind in der Meraner Reform und dem traditionellen Sachrechnen auch teilweise angesprochen, jedoch werden sie im englisch-sprachigen Raum konsequenter ausgearbeitet. Weitere Unterschiede bestehen darin, daß im englisch-sprachigen Raum die Unterrichtsorganisation flexibler gehandhabt wird und vor allem die angebotenen Beispiele farbiger sind, in viel stärkerem Maße den Schritt aus dem Klassenzimmer in die Umwelt erfordern und einen längeren Atem erfordern.

Die in dem Kongreßbericht "Goals for the Correlation of Elementary Science and Mathematics" angegebenen fünf Beziehungen eignen sich, um nochmals auf ein Anliegen dieser Arbeit einzugehen: Für die hier vorliegende Arbeit sind die ersten vier Beziehungen bedeutsam. Sie müssen im Unterricht erkennbar werden, um ein ausgewogenes Bild von der Mathematik zu zeichnen. Von den vier Beziehungen ist die erste vielfach im gymnasialen M. U. verwirklicht, während die zweite Beziehung in den Mathematikkursen naturwissenschaftlicher Fakultäten hervortritt, wo Mathematik reine Hilfswissenschaft ist.
Die vierte Form der Beziehung wird im Unterricht häufiger praktiziert. Situationen haben dort die Funktion eines Auf-

hängers, von dem aus möglichst schnell in die Mathematik eingedrungen werden soll. Es besteht dabei kein unmittelbares Interesse an der Situation selbst. Deswegen eignen sich für dieses Vorgehen besonders künstliche Situationen. In den Veröffentlichungen von A.ENGEL ist dieser Stil ausgeprägt vertreten.
Es ist ein Hauptanliegen dieser Arbeit, die dritte Beziehung zwischen Mathematik und Naturwissenschaften, die von COULSON und DUDLEY als das partnerschaftliche Verhältnis bezeichnet wird, unter verschiedenen Gesichtspunkten zu beleuchten. Es ist wohl die Beziehung, die im Bildungswesen in geringstem Umfang verwirklicht ist.

Abschließend möchte ich noch auf die von POLLAK erwähnten Schwierigkeiten bei der Behandlung von Anwendungen im Mathematikunterricht eingehen:
Dem Argument, daß Kinder wenig über Anwendungen wissen, messe ich keine große Bedeutung zu, da es genügend viele allgemein bekannte Alltagssituationen gibt, die in reichhaltiger Weise eine Mathematisierung gestatten. Andererseits zählt es ja als typisch für echte Anwendungen, daß man sich erst in die Situation einleben muß. Wichtiger scheint mir folgender Punkt: "Die Lehrer wissen zu wenig über Anwendungsgebiete." Dieser Mangel wiegt besonders schwer, da meist vom Lehrer der Anstoß für die Mathematisierung von Situationen ausgeht. Dieses Defizit könnte teilweise dadurch ausgeglichen werden, daß in Schulbüchern entsprechende Situationen angegeben werden. Nicht zu überbrücken ist dieser Mangel, wenn aktuelle (aus dem Tagesgeschehen gegriffene) Situationen mathematisiert werden können, und dem Lehrer der "Blick" fehlt, dieses zu erkennen. In diesem Zusammenhang ist es nicht verwunderlich, wenn POLLAK (1968) es als "große unvollendete Aufgabe" (sieht)..., angemessene Beispiele für ernsthafte Anwendungen der Mathematik zu sammeln, besonders für die unteren Schuljahre (S. 30). Meines Erachtens liegt hierin eine große Aufgabe der Lehrerausbildung. Sie kann sich nicht darauf beschränken, dem

Lehrerstudenten eine Theorie von einem derart frei verlaufenden Unterricht mitzugeben, vielmehr muß er die Möglichkeit haben, sich auf einen solchen Unterricht auf der Ebene praktischen Arbeiten vorzubereiten. (In Kapitel III wird dieses Problem nochmals aufgegriffen). So könnte ein Kreislauf unterbrochen werden, in dem ein angehender Lehrer sich wieder am Unterrichtsstil seines früheren Lehrers orientiert. Diese Maßnahme muß jedoch eingebettet sein in das Streben nach einem engagierten Lehrer, der einen ihm zustehenden Freiraum ausfüllen kann.

1.4 Der sogenannte "gesellschaftskritische Ansatz"

Im folgenden möchte ich die Arbeiten einiger Autoren (BÖLTS, DAMEROV, KEITEL, MÜNZINGER, VOLK u. a.) unter dem Schlagwort "gesellschaftskritischer Ansatz" zusammenfassen und als eine vierte Strömung herausstellen, die erst in den siebziger Jahren entstanden ist, obwohl vergleichbare Ansätze vereinzelt schon in der Weimarer Zeit zu finden sind (siehe O. F. KANITZ, 1924). Charakteristisch für diese Autoren ist, daß sie in engstem Kontakt zur gesellschaftskritischen Pädagogik und Sozialwissenschaft stehen.
Das Hauptziel des gesellschaftskritischen Ansatzes besteht darin, wie P.DAMEROW et al.(1974) in ihrem Buch "Elementarmathematik: Lernen für die Praxis?" darlegen, die "Schulmathematik an der gesellschaftlichen Praxis" zu orientieren.
Damit ist zweierlei gemeint: Der Mathematikunterricht soll zum Erwerb berufswirksamer Fähigkeiten beitragen und gleichzeitig zur Gesellschaftskritik befähigen, indem er Qualifikationen vermittelt, die sich in Situationen zu beweisen haben, in denen eine "tendenziell aufhebbare Grundbestimmung" (S. 16) möglich ist. BÖLTS und andere Autoren übernehmen diese Zielvorstellung: Es ist die Aufgabe des Unterrichts zur "Qualifizierung für den Vollzug von Fähigkeiten am späteren Arbeitsplatz des Schülers und die Einsicht in die ökonomische, politische, soziale und kulturelle Rolle des konkreten gesellschaftlichen Individuums" (BÖLTS, 1975, S. 343). Gerade das zweite Ziel - die Erziehung zur Kritikfähigkeit an gesellschaftlichen Zuständen - erfordert die Organisation des Unterrichts in Projekten, die es gestatten komplexere Situationen mit ihren sozialen Randbedingungen in den Unterricht einzubringen. Voraussetzung zur Erreichung der Kritikfähigkeit ist, wie BÖLTS (1975, S. 343) betont, der Verzicht auf jegliche Trivialisierung des Verhältnisses von inhaltlichen Problemen der sozialen Umwelt und deren Wiederspiegelung in formalen Begriffen, Gesetzen und Systemen." BÖLTS (S. 344) stellt fest, daß zur Erfassung des hier angesprochenen Verhältnisses zwischen Realität und Modell "Übersetzungsqualifi-

kationen" notwendig sind. Einige sind: die Fähigkeit zum Entwurf von Rechenprogrammen, zu bewußt abstraktem Denken, zu formalsprachlicher Flexibilität, zur inhaltlichen Interpretation quantifizierter Information usw.
MÜNZINGER (1975, S. 19) fordert, daß die Projekte auch die aktuellen Bedürfnisse der Schüler berücksichtigen sollen und somit eine Mitsteuerung durch Schüler zulassen. Damit ist auch eine Veränderung der Rolle des Lehrers verbunden. "Er kommt weg vom Informaten hin zum Anreger von Lernprozessen."
Von der Behandlung echter Anwendungen wird ein nachhaltiger Motivationseffekt erwartet: NEANDER (1975) stellt fest: "Mathematik in isolierter Form ist uninteressant. Stellt man jedoch Mathematik in Beziehung zu Nachbarwissenschaften und gesellschaftlicher Praxis, so wird sie für Schüler interessant."
Diese Sicht teilt MÜNZINGER (1975, S. 29), denn mit der Simplifizierung echter Anwendungssituationen für die Schule verlieren sie in der Regel ihren Motivationscharakter."

Die Diskussion über Beziehungen zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik erfolgt nur punktuell: Beispielsweise will NEANDER die Behandlung rein mathematischer Themen nur in Leistungskursen vornehmen.

Zur Konkretisierung und unterrichtspraktischen Verwirklichung des gesellschaftskritischen Ansatzes sind wenige Unterrichtsprojekte ausgearbeitet und teilweise auch erprobt worden.
Im Vordergrund stehen Beispiele, die in erster Linie auf die kritische Durchleuchtung gesellschaftlicher Phänomene abzielen:
KANITZ geht in seinem Aufsatz "Eine objektive, doch gefährliche Rechenstunde", der Frage nach, "Woher die Zinsen kommen."
Er stellt seine Frage grundsätzlich den im Sachrechnen gestellten Aufgaben gegenüber, wo nur Zinsen berechnet werden, jedoch keine kritische Hinterfragung erfolgt.
SCHÖN (1975) fordert Projekte wie: Die Macht der Banken; das Verhältnis von Leistung und Lohn usw.

VOLK et al. (1976) behandeln in der Hauptschule ein Projekt, in dem die Auswirkungen von aktuellen Tarifabschlüssen auf den Nettolohn herausgearbeitet werden. Die Schwierigkeiten des Projekts liegen z. T. darin, daß das für Tarifabschlüsse typische Wortrepertoir anhand von Zeitungsausschnitten usw. voll in den Unterricht eingebracht wird. Ein weiteres Projekt wird von DAMEROW et al. (1974) vorgestellt, bei dem es um die Bestimmung des Siegers in einem Schildkrötenrennen geht. In diesem künstlichen Beispiel treten Personen auf, deren Argumente und Rechnungen auf ihre Stichhaltigkeit hin untersucht werden.

Kommentar

Im Gegensatz zu den zuvor behandelten Strömungen besitzt der gesellschaftskritische Ansatz keine Tradition. In der didaktischen Diskussion hat er kein großes Echo gefunden, während er in Schulbüchern und Lehrplänen noch weniger zum Zuge kommt.

Es ist daher nicht verwunderlich, daß sich der gesellschaftskritische Ansatz noch nicht in einer Weise artikuliert hat, die der Vielfalt mathematikdidaktischen Arbeiten genügen würde. Vom Standpunkt eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts fallen m. E. drei Defizite besonders ins Gewicht:

1. Die Wechselwirkungen zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik werden nicht diskutiert, so daß hieraus auch keine Konsequenzen für ein Curriculum gezogen werden. Die Einschätzung der Mathematik als Hilfsmittel beinhaltet die Gefahr, daß die Schüler die Reine Mathematik als nutzlos betrachten. Jedenfalls erfährt der Schüler ein Zerrbild der Mathematik.
2. Beziehungen zu den Naturwissenschaften werden nicht expliziert.

3. Der Leser bekommt keinen Eindruck, wie der Mathematikunterricht insgesamt verlaufen soll, und wie der die Projekte tragende mathematische Boden zustande kommt und aus welchen Inhalten er besteht. Generell erfolgt keine didaktische Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten.

Der Verdienst des gesellschaftskritischen Ansatzes besteht m. E. darin, daß er auf die mathematische Untersuchung gesellschaftlicher Zusammenhänge hinweist und damit bisher behandelte Anwendungsgebiete in der Schule erweitert und das Problem der "Übersetzungsqualifikationen" - also der beim Modellbilden grundlegend benötigten Qualifikationen anspricht. Hinzu kommt, daß mit dem Projektunterricht konsequent eine Unterrichtsform verfolgt wird, die dafür geeignet ist, die Komplexität von gesellschaftlichen Vorgängen in den Unterricht einzubringen.

1.5 Tendenzen in der gegenwärtigen Diskussion zur Didaktik der Anwendung.

Die oben dargestellten vier Strömungen entwickelten sich im wesentlichen unabhängig von einander und teilweise in bewußtem Kontrast zueinander. Charakteristisch für die gegenwärtige Diskussion der Anwendungen ist hingegen, daß sie einem verstärkten internationalen Gedankenaustausch entspringt - wie er vor allem durch Zeitschriften und Tagungen ermöglicht wird - und eine Integration von Ideen verschiedener Strömungen (auch der gesellschaftskritischen) anstrebt. Am Werk von H. WINTER u. a. kann dies verdeutlicht werden. Die ersten bedeutenden Arbeiten von H. WINTER entstammen der Zeit um 1970. Kennzeichnend für diese Zeit war u. a., daß das schultypenspezifische Denken abgelöst wurde durch eine Angleichung der Ziele der verschiedenen allgemeinbildenden Schulen. Als äußeres Zeichen dafür kann die Entwicklung von Schulbüchern angesehen werden, die für den Einsatz an Hauptschulen, Realschulen und Gymnasien gedacht waren (siehe WINTER/ZIEGLER "Neue Mathematik", ATHEN/GRIESEL "Mathematik heute", ROLLER

u. a. "Mathematik B" usw). Mögliche Zielsetzungen des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen hat WINTER (1975, 1972a) in einem Katalog allgemeiner Lernziele zusammengestellt:

1. Ein Schüler soll sich kreativ verhalten,
2. der Schüler soll argumentieren können.
3. Der Schüler soll erfahren, daß Mathematik anwendbar ist.
4. Der Schüler soll Grundtechniken beherrschen.

Die inhaltliche Beschreibung dieser vier Lernziele zeigt, daß die von LIETZMANN (vgl. 1.1) angegebenen Ziele der Erziehung zur Größenerfassung, Anschauung und Anwendung mit dem 3. WINTER schen Lernziel in Beziehung stehen, während die Erziehung zur logischen Fähigkeit mit dem 2. Lernziel korrespondiert. Eine teilweise Beziehung besteht zwischen der Forderung von Phantasie sowie ethischen und ästhetischen Erziehungswerten einerseits und dem 1. Lernziel von WINTER. Das 4. Lernziel [1] wird bei LIETZMANN nicht thematisiert.
Diese Lernziele sollen im Unterricht nicht isoliert voneinander angestrebt werden, vielmehr fördert ein vielseitiger Unterricht alle diese Lernziele, wobei nur der eine oder andere Aspekt überwiegt. Die von WINTER (1976a-c, 1972a) für den Bereich von der Primarstufe bis zur S II entworfenen Unterrichtsbeispiele zeigen dies. Insofern wird deutlich, daß die Anwendungen im Unterricht - WINTER spricht von Sachrechnen - nicht für sich oder als Anhängsel an den Mathematikunterricht betrachtet werden, sondern in eine Gesamtkonzeption von Mathematikunterricht eingebracht sind. Dadurch wird es möglich, die Anwendungen in vielfältige Beziehungen zum übrigen Unterrichtsgeschehen und zur Didaktik zu bringen.

---

[1] Mit dem 4. Lernziel wird u.a. die Förderung von Rechenfertigkeiten angesprochen. Für LIETZMANN mag dies selbstverständlich gewesen sein. Bei WINTER bekommt dieses Ziel aber auch aus den Zeitumständen seine Bedeutung. Es ist ein Argumentationsmittel gegen die pauschale Kritik, daß der reformierte M.U. zuwenig Rechenfertigkeit vermittle. Diese Kritik kann durchaus zutreffen, jedoch nicht für alle Reformkonzeptionen der jüngsten Vergangenheit.

Ähnlich wie die Meraner Reform und die Volksschuldidaktik nennt WINTER vor allem drei Gründe für die Einbeziehung der Anwendungen in den Unterricht.

a) Das Wesen der Mathematik erfordert eine Beachtung der Anwendungen. WINTER/ZIEGLER (1969, Bd. 6, S. 6) sind sogar bereit, die Systematik eines Lehrgangs zu verlassen, um dem Schüler ein ausgewogenes Bild der Mathematik zu vermitteln: Nach einem Kapitel über die Teilbarkeitslehre in Klasse 7 wird gefordert, daß man einen anwendungsfreudigen Stoff aufgreifen soll: "Eine ausgewogene Betrachtung reiner und angewandter Aspekte (legt) das Vorziehen der Bruchzahlen nahe."

b) Lernpsychologische Gründe sprechen für die Einbeziehung der Anwendungen in den Unterricht (WINTER, 1976 c): "Einerseits liefert die Umwelt einen Teil der Vorerfahrungen, an denen Lernprozesse ansetzen können, andererseits erweisen sich Umweltsituationen als Testmaterial, an denen sich Schemata erproben können."

c) Bei den pädagogischen Gründen steht das Argument der Lebensbereichung im Vordergrund. Mathematik ist ein Mittel zum Verstehen und Gestalten der Umwelt.
Schließlich sind Anwendungen z. T. Kulturtechniken, wie sie im täglichen Leben und Beruf verwendet werden.

Diese Argumente lassen erkennen, daß die Anwendungen in WINTERs Konzeption eine bedeutende Rolle spielen. Dies wird auch aus einem anderen Blickwinkel deutlich.

Bei der Auswahl der mathematischen Inhalte sollen sieben Gesichtspunkte berücksichtigt werden (WINTER, 1972b, S. 84). Drei davon stehen im Zusammenhang mit Anwendungen.

— "Inwieweit ist der Stoff speziell bedeutsam für Anwendbarkeit im Sinne einer allgemeinen Berufsvorbereitung?
— Inwieweit berührt der Stoff Inhalte anderer Schuldisziplinen?
— Inwieweit ist der Stoff geeignet, möglichst vielen der allgemeinen Lernziele gerecht zu werden?"

Die Konkretisierung der bis hier erwähnten allgemeinen Überlegungen vollzieht WINTER vor allem in bezug auf die Primarstufe und Sekundarstufe I. Seine Vorschläge erwachsen u. a. aus einer klaren Kritik am traditionellen Sachrechnen (vgl. 1.2) und an einer rigorosen Richtung der Reform des Mathematikunterrichts.
WINTER (1976a, S. 132) stellt folgende Liste möglicher Mängel des "neuen" Mathemathikunterrichts zusammen:

"1. Das Abstraktionsvermögen der Kinder wird weit überfordert, bzw. wegen Mangel an konkretem Material kann gar nicht eigentlich abstrahiert werden.
2. Die Sprache wird auf Kosten von Inhalten enorm überbewertet.
3. Das Training "lokaler" Fertigkeiten (Algorithmen) wird vernachlässigt.
4. Die Beschäftigung mit interessanten Einzelproblemen kommt zu kurz.
5. Die möglichen Beziehungen zur Wirklichkeit werden abgeschnitten.
6. Die Genese von fundamentalen Begriffen wird sträflich vernachlässigt."

Vereinfacht könnte man sagen, daß die Umstellung des Unterrichts auf die Neue Mathematik in einer Ablösung des Rechenfertigkeitsdrills durch einen Drill auf der Leitlinie Menge, Struktur, Abbildung bestand. Anwendungen erfuhren keine angemessene Förderung, was sich insbesondere in den Veröffentlichungen der Didaktiker widerspiegelt. (Man vergleiche etwa die "Beiträge zum Mathematikunterricht".)

Es ist wohl das große Verdienst von H. WINTER, in einem breit gefächerten Katalog von Maßnahmen und Überlegungen an einer Reform des Mathematikunterrichts gearbeitet zu haben, die einerseits an Traditionen anknüpft, andererseits Ideen aus dem Bereich der Neuen Mathematik aufgreift und zu einem neuen Konzept von Mathematikunterricht verarbeitet.
Die curricularen Vorschläge beispielsweise zum Primarstufen-

unterricht bestätigen dies: Inhaltlich steht die Arithmetik im Vordergrund. Jedoch spielen Geometrie einschließlich topologischer Gesichtspunkte eine wesentliche Rolle. Schließlich kommt die Förderung stochastischen Denkens hinzu. Die Durchdringung dieser Gebiete erfolgt auf der Leitlinie Menge, Struktur, Relation, Abbildung. Diese modernen Ideen wurden nun nicht isoliert, um ihrer selbst willen oder aus irgend einem grundlagentheoretischen Anspruch verfolgt, sondern sie haben ihre Leistungsfähigkeit vor allem beim Ordnen von Umweltsituationen, also im Sachrechnen zu beweisen (vgl. WINTER, 1976c, S. 345).

Neben grundsätzlichen Überlegungen werden auch methodische Hinweise gegeben: Für das "bürgerliche Rechnen" wird auf zwei Hilfsmittel hingewiesen. Das eine ist eine Tabelle, in der die in Sachaufgaben häufig vorkommenden verbalen Operationen den mathematischen Operationen zugeordnet sind. Z. B. bedeutet "halbieren" ein Dividieren mit zwei oder multiplizieren mit 1/2; "verringern" wird einer Subtraktion zugeordnet usw. Die andere Hilfe ist der Rechenbaum oder das Simplexdiagramm. Er soll besonders dann eingesetzt werden, wenn eine Vielzahl von Teilergebnissen dem Schüler die Übersicht erschweren. WINTER/ZIEGLER (1969, Lehrerheft Bd. 5, S. 34-35).

WINTER variiert in vielfältiger Weise die Bestimmtheit und Komplexität der Aufgaben

- Unterschuß an Daten, so daß diese vom Schüler noch gesammelt werden müssen.
- Überflüssigen Daten, so daß die für die Fragestellung unbedeutenden Angaben aussortiert werden müssen, Vorgabe der Fragen; Offene Probleme
- Projektaufgaben vor allem mit Beziehungen zum Sachrechnen; kleine Alltagsaufgaben.

Die Verbreitung seiner Ideen verfolgt WINTER auf vier Ebenen.

1. Entfaltung einer reichhaltigen Publikationstätigkeit, die durch ihre Ausgewogenheit an theoretischen und praktischen Überlegungen besticht,

2. Ausbildung von Lehrerstudenten und Mitwirkung bei Lehrerfortbildungen,
3. Maßgeblicher Einfluß auf den Lehrplan 1972 von Nordrhein-Westfalen für Grund- und Hauptschulen,
4. Entwicklung von Unterrichtsmaterialien.

Der Gedanke der Berufsorientierung des Unterrichts war unter dem Einfluß der "Neuen Mathematik" stark zurückgedrängt worden und auf der Ebene der Konstruktion von Unterrichtsbeispielen praktisch nicht mehr verfolgt worden. VOLLRATH (1975) greift diesen Gedanken wieder auf. Seine Überlegungen sind auf die Hauptschule abgestimmt.
Es ist interessant zu sehen, daß nach mehreren Jahren, in denen Lehrpläne und Schulbücher im wesentlichen für alle Typen allgemeinbildender Schulen gelten sollten, ein Vorschlag unterbreitet wird, demzufolge wieder eine stärkere Trennung oder Berücksichtigung spezieller Belange der Schultypen wünschenswert wäre. Dies hat unter dem Gesichtspunkt der Beachtung der späteren Berufe der Schüler seine Berechtigung, denn aus der Hauptschule ging in den vergangenen Jahren in erster Linie die Gruppe der Handwerker hervor. (Dies könnte sich in naher Zukunft ändern, da viele Realschüler - unter dem Druck von Abiturienten, die keinen akademischen Beruf mehr anstreben - in handwerkliche Berufe drängen.) VOLLRATH sieht "die Gefahr einer einseitigen Orientierung des Unterrichts an mathematischen Denkweisen und Begriffen, die allenfalls auf die Fähigkeiten, kaum aber auf die Bedürfnisse der Schüler Rücksicht nimmt." (S. 489)
Wo liegen nun Bedürfnisse? Beispielsweise führen die "in der Praxis auftretenden Formen in Bauhandwerk, Malerberuf, metallverarbeitenden Berufen zu einer Fülle verschiedener Flächen- und Volumenberechnungen. Es ist wichtig, daß der Mathematiker hier den Bedarf an Formeln für die wichtigsten Formen deckt." An der Flächenberechnung einer Hausfassade demonstriert VOLLRATH die Anwendung von Dreiecks- und Rechtecksflächenberechnungen, wobei vielfältige arithmetische Umformungen benutzt

werden. Obwohl der Ansatz von VOLLRATH genauso wie die Volksschuldidaktik den Schüler "berufsfähig" machen will, unterscheiden sich beide. VOLLRATH gelingt es, authentische Anwendungen aus dem Berufsleben anzugeben, während doch die Anwendungen in der Volksschuldidaktik nicht durch ihre Realitätsnähe überzeugen konnten. Außerdem wird die Gefahr erkannt, die sich für eine umfassende mathematische Bildung aus einer einseitigen Behandlung berufsnaher Situationen ergeben kann:
"Der Mathematikunterricht kann sicher von berufsorientierten Fragen profitieren, könnte allerdings auch durch die Behandlung zu formaler, berufsbezogener Techniken entmathematisiert werden."

2. Die Berücksichtigung der Anwendungen in Lehrplänen und Schulbüchern seit Beginn des Jahrhunderts

Im vorausgegangenen Abschnitt habe ich Literatur referiert, in der das Problem der Anwendungen in der Schule mehr im Grundsätzlichen angesprochen wird.
Ich untersuche nun, wie sich diese didaktischen Beiträge auf einer unteren Ebene mit direktem Bezug zum Geschehen im Klassenzimmer auf Lehrpläne und Schulbücher ausgewirkt haben. Dabei beschränke ich mich auf die Ideen der Meraner Reform, der traditionellen Sachrechendidaktik und darauf aufbauenden neueren Tendenzen. Die "gesellschaftskritische" und die "englischsprachige" Strömung werden nicht weiter verfolgt, da sie bisher keinen nennenswerten Einfluß auf Schulbücher und Lehrpläne in der Bundesrepublik Deutschland ausgeübt haben.

2.1 Anwendungen in Lehrplänen und Schulbüchern der Gymnasien

Die im vorigen Abschnitt dargestellten Ideen der Meraner Reform fanden ihren formalen Niederschlag in dem "Meraner-Lehrplan", der 1905 anläßlich der Jahrestagung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte in Meran der Öffentlichkeit vorgestellt wurde. Dieser Meraner Lehrplan enthält nicht nur Vorschläge zur Reform des Mathematikunterrichts, sondern gibt die Reformvorstellungen für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht an höheren Schulen wieder, den die 1904 eingesetzte Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte ausgearbeitet hat.

F. KLEIN war selbst Vorsitzender einer für den mathematisch-physikalischen Unterricht gebildeten Unterkommission. Diskussionsgrundlage zur Entwicklung des Meraner Lehrplans bildet ein Lehrplan, den O. BEHRENDSEN und E. GÖTTING dem mathematischen Unterricht am Göttinger Gymnasium zugrundelegten (siehe KLEIN/SCHIMMACK, 1907, S. 127). Es zeigt sich

hier, daß der Meraner Lehrplan in enger Zusammenarbeit von einzelnen Schulmännern und Hochschullehrern entwickelt wurde.
Der auf den Mathematikunterricht bezogene Teil des Meraner Lehrplans, der u.a. in KLEIN/SCHIMMACK (1907, S. 208-220) abgedruckt ist, gliedert sich in drei Teile

1. Präambel
2. Mathematischer Lehrplan für die Gymnasien
3. Erläuterungen zu dem vorstehenden mathematischen Lehrplan für Gymnasien.

Im folgenden sollen die Stellen aus dem Lehrplan herausgegriffen werden, die aus heutiger Sicht von besonderem Interesse sind, insbesondere solche, die speziell auf die Einbeziehung von Umweltsituationen und Anwendungen in anderen Wissenschaften hindeuten.

Zu 1: Der Meraner Lehrplan hebt sich vor allem in drei Punkten von früheren Lehrplänen (mit Ausnahme des preußischen Lehrplans von 1901, der schon wesentliche Elemente des Meraner Lehrplans enthält) ab.

a) Das Vorverständnis der Schüler wird als zentrale Randbedingung für den Unterricht gesehen."Einmal gilt es, den Lehrgang mehr als bisher dem natürlichen Gang der geistigen Entwicklung anzupassen, überall an den vorhandenen Vorstellungskreis anzuknüpfen, die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindungen zu setzen,endlich den Zusammenhang des Wissens in sich und mit dem übrigen Bildungsstoff der Schule von Stufe zu Stufe mehr und mehr zu einem bewußten zu machen." (S. 208)

b) Neu in den Schulstoff werden Infinitesimalrechnung und analytische Geometrie aufgenommen. Das funktionale Denken soll gefördert werden; insbesondere weil es in den Naturwissenschaften benötigt wird.

c) Die Anwendungen sollen verstärkt werden: "... die Fähigkeit zu mathematischen Betrachtungen der uns umgebenden Erscheinungswelt ist zu möglichster Entwicklung zu bringen." (S. 208) Und ein abschließendes Ziel der Oberprima ist "... die Einsicht in die Bedeutung der Mathematik für die exakte Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt."

Zu 2: Der Meraner Lehrplan geht in bezug auf die Beschreibung der Inhalte stichwortartig vor. Ein Grund liegt darin, dem Lehrer bei der Verwirklichung des Lehrplans höchstmögliche Freiheit zu lassen.
Folgende Passagen stehen in direktem Zusammenhang mit Anwendungen:
5. Klasse: "Die deutschen Maße, Gewichte und Münzen",
6. Klasse: "...ausländische Gewichte und Münzen, Längenmessungen verschiedener Art auch im Gelände ... propädeutsche Raumlehre ...zunächst an der Umgebung erläutert..."
7. Klasse: "Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, insbesondere einfache Fälle der Prozent-, (Zins-, Rabatt-) Rechnung",
8.-10. Klasse: "Eingekleidete Gleichungen" ersten und zweiten Grades,
11. Klasse: "..., Begriff und Anwendung des Logarithmus, ... Anwendung der geometrischen Reihen auf Zinseszinsen- und Rentenrechnung in einfachster, der Wirklichkeit entnommenen Aufgaben",
12. Klasse: Anwendung der Differentialrechnung in der Physik. "Mathematische Geographie, einschließlich der Lehre von den Kartenprojektionen",
13. Klasse: "Kegelschnittlehre..., mit Anwendungen auf die Elemente der Astronomie".

Zu 3: In den Erläuterungen zu dem Lehrplan werden u.a. die Anwendungen näher umschrieben, jedoch keine Beispiele angeführt, so daß es dem Lehrer oder dem Schulbuch überlassen bleibt, solche anzugeben. Eine Randbedingung für die Auswahl von Aufgaben ist: "Die Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben müssen wirkliche, nicht fingierte, praktisch niemals vorkommende Verhältnisse behandeln. Insofern ist der Rechenunterricht vielfach Sachunterricht."(Dieser deutliche Realitätsbezug verliert sich in späteren Lehrplänen.) Stellenweise ist an eine Koordination des Mathematikunterrichts mit anderen Fächern gedacht. "Die mathematische Erdkunde und die Elemente der Astronomie schließen sich an die entsprechenden Teile des physikalischen Unterrichts an."

Der Meraner Lehrplan war von den rein mathematischen Inhalten her gesehen bestimmend für die folgenden Lehrpläne an Gymnasien bis etwa zu den Jahren 1965-1970. Eine Textgegenüberstellung mit dem Baden-Württembergischen Lehrplan von 1957, der bis 1971 gültig war, und dem Bildungsplan für allgemeinbildende Schulen im Lande Hessen bestätigt dies. Als Beispiel wird hier das 7. Schuljahr genommen.

Meraner Lehrplan (1905):

"Dezimalbruchrechnung. Abgekürztes Rechnen (an einfachsten Beispielen). Regel detri unter Vermeidung aller Übertreibung schematischer Formen. Aufgaben aus dem bürgerlichen Leben, insbesondere einfache Fälle der Prozent-, (Zins-, Rabatt-) Rechnung. Vorbereitung des arithmetischen Unterrichts durch Wiederholung geeigneter, früher gelöster Aufgaben, unter Verwendung von Buchstaben statt bestimmter Zahlen. Zusammenhang der Kopfrechenregeln mit den Klammerregeln.
Raumlehre. Lehre von den Geraden, Winkeln und Dreiecken. Beweglichkeit der Figuren, Abhängigkeit der Dreiecksstücke voneinander; Übergangsfälle (rechtwinklige Dreiecke, gleich-

schenklige, gleichseitige). Einfache Parallelogrammsätze, ausgehend von der Konstruktion der Gebilde."

Baden Württemberg (1957):
"Wiederholung des Bruchrechnens. Das Prozentrechnen mit einfachen Aufgaben aus verschiedenen Lebensbereichen des Einzelnen und der Gesellschaft.
Spiegelung, Parallelverschiebung, Drehung. Geometrische Grundaufgaben. Anfänge der Dreiecks- und Viereckslehre. Einführung in das Rechnen mit allgemeinen Zahlen. Einfache lineare Gleichungen mit einer Unbekannten."

Hessen (1957):
"Verwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche und umgekehrt; der periodische Dezimalbruch. Prozentrechnung. Einfache angewandte Aufgaben aus dem Leben des einzelnen und der Gesellschaft. Symmetrie. Geometrische Grundaufgaben. Parallelverschiebung und Drehung. Einführung in die Dreieckslehre."

Die Präambeln der beiden Lehrpläne von 1957 betonen die Bedeutung der Anwendungen. Der hessische Bildungsplan beginnt so: "Der mathematische Unterricht soll den Schüler lehren, seine Umwelt mit Maß und Zahl zu durchdringen." Und der Baden-Württembergische Lehrplan stellt fest: "Die Mathematik ist ein in sich gegründetes Gebilde, vermag jedoch auch außerhalb ihres Bereiches Gesetzmäßigkeiten ordnend zu erfassen und gedankliche Modelle der Wirklichkeit zu schaffen." Eines von elf Unterrichtszielen ist die Forderung "das mathematische an den Erscheinungen der Umwelt zu erfassen und darzustellen." Unter einem Abschnitt "Lehrverfahren" wird vermerkt:
"Die angewandten Aufgaben sollen wirklichkeitsnah und ungekünstelt sein und keine umfangreichen Sacherläuterungen erfordern." [1]

[1] Mit dieser letzten Formulierung könnte gemeint sein, daß nur solche Situationen mathematisiert werden sollen, bei denen die Problemformulierungen auf der Hand liegen und die Daten ebenfalls. Es dürfte darauf hinauslaufen, daß Anwendungen sic auf Textaufgaben beschränken.

In einer Vorbemerkung zum Nürnberger Lehrplan wird zwar die Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften und Technik betont. Diese Bedeutung läßt sich aber in der Beschreibung der einzelnen Stoffgebiete nicht wiedererkennen. Beispielsweise wird die Geometrie der Mittelstufe (einschließlich Trigonometrie) mit ca. 250 Worten beschrieben; ein Hinweis auf Anwendungen erfolgt lediglich mit einem Wort, nämlich: "Anwendungen".

In dem Baden-Württembergischen Lehrplan von 1971 werden die Anwendungen in einer Vorbemerkung "berücksichtigt":

"Obwohl der Stoffplan dies nicht jedesmal ausdrücklich erwähnt, muß es nach wie vor ein wichtiges Anliegen des Unterrichts sein, gewonnene Ergebnisse und Kalküle immer wieder auf verschiedene Sachgebiete, auch außerhalb der Mathematik, anzuwenden."

Bedenkt man noch, daß nach Untersuchungen von LENNÉ Vorbemerkungen (Präambeln) der von Lehrern am wenigsten beachtete Teil in Lehrplänen ist, liegt die Vermutung nahe, daß von den neuen Lehrplänen nur ganz geringe Impulse auf Anwendungen im Unterricht ausgehen.

Aus dem Nordrhein-Westfälischen Lehrplan von 1972 für die gymnasiale Oberstufe ist ebenfalls zu ersehen, daß den Anwendungen kein Gewicht beigemessen wird. So wird der Leistungskurs für Lineare Algebra und Analytische Geometrie auf acht Seiten (S. 78-85) beschrieben. Anwendungen werden mit drei Bemerkungen bedacht: Der Kurs "soll den Vektorraum als eine für die Mathematik, aber auch für Naturwissenschaften und Datenverarbeitung wesentliche Struktur vorstellen" (S. 78). "Zur Motivation geeignetere Axiome für das Skalarprodukt kann man z.B. vom physikalischen Arbeitsbegriff ausgehen." (S. 82). "Falls die Zeit reicht, sollten ferner einige Anwendungen des Sinus- und Cosinussatzes behandelt werden." (S. 81)

In den gymnasialen Schulbüchern, die mit den drei vorgenannten Lehrplänen korrespondieren, führen die Anwendungen ein Randdasein. Einige dieser Bücher enthalten im wesentlichen eine

Anhäufung von Axiomen, Definitionen und Sätzen. Ein besonders krasses Beispiel ist das Buch DORMANNS/KUYPERS "Axiome, Mengen, Strukturen", Düsseldorf 1972.
Nach den bisherigen Ausführungen wäre zu erwarten, daß Schulbücher, die mit den Lehrplänen von 1957 korrespondieren, den Meraner Ideen noch eher gefolgt sind. Zur Klärung dieser Frage werden im folgenden einige Schulbücher näher betrachtet.

Zwei in Deutschland an Gymnasien weitverbreitete Unterrichtswerke für die SII waren die Analysisbücher von LAMBACHER/SCHWEIZER (1958[9])und WÖHRLE/KRATZ/KEIL (1962) sowie die "Analytische Geometrie" von LAMBACHER/SCHWEIZER (1958[10]),
Die überwiegende Zahl der Aufgaben ist rein innermathematischer Art. Die gelegentlich eingestreuten Anwendungen auf die Umwelt sind keine "echten" Anwendungen. Offene Problemsituationen erscheinen im ganzen Buch nicht.
Zwei typische Beispiele aus LAMBACHER/SCHWEIZER (1958[9], S.115) sind:
Aufgabe 35: "Der massive Fuß eines Stativs hat die Form, die entsteht, wenn man das zwischen $x = -2$ und $x = 2$ gelegene Stück der Kurve mit der Gleichung $y = 0{,}25x^3$ um die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ dreht. Berechne den Flächeninhalt des Achsenschnitts."
In der Terminologie von POLLAK handelt es sich hier um ein typisches "Wortproblem." Wesentliche Schritte, wie Datenbeschaffung und Aufstellen eines Modells entfallen. Außerdem ist die Aufgabenstellung belanglos. Wer interessiert sich schon für diesen Flächeninhalt? Von der Beantwortung der Frage hängt nichts ab.

Aufgabe 36: "Ein wasserführender Stollen hat einen parabolischen Querschnitt mit 4 m Sohlenbreite und 3,8 m Scheitelhöhe. Wieviel m^3 Wasser kann der Stollen in 1 sec. führen bei einer zulässigen Höchstgeschwindigkeit des Wassers von 3,5 m/sec. und einer Füllung bis 3/4 der Scheitelhöhe?"

Gegenüber Aufgabe 35 könnte diese Fragestellung bedeutsamer sein. Aber der Modellbildungsvorgang wird wieder nur verkürzt sichtbar. Eine präzise Frage ist schon gestellt. Die Daten liegen zur Verarbeitung bereit, und zwar sind es genau die, die zur Anwendung des vier Seiten vorher (S. 111) eingeführten Integrationskalküls benötigt werden.

Vergleicht man die beiden Ausgaben der Analysisbücher von LAMBACHER/SCHWEIZER aus den Jahren 1958 und 1970, so sind in der jüngeren Ausgabe die Anwendungen weniger berücksichtigt. Insbesondere entfallen aus dem Kapitel "Folgen und Reihen" die Abschnitte "Rentenrechnung", "Versicherungsrechnung" und "Wachstumsfunktionen". [1)]
Es bleibt jedoch festzuhalten, daß zu jedem größeren Abschnitt meist unter dem Thema "Vermischte Aufgaben" eine Reihe von Anwendungsaufgaben des eben dargestellten Typs dargeboten werden.
Im Vergleich zu diesem Angebot an Anwendungsaufgaben erweist sich das Angebot in der "Analytischen Geometrie" (1958) als äußerst dürftig: In den Kapiteln über Gerade, Kreise und Hyperbeln werden keine Anwendungen besprochen. Eine Anwendungsaufgabe findet sich zum Kapitel über Ellipsen (S. 80):
"Der Encksche Komet ist in der größten Sonnennähe etwa 50 Millionen km, in der größten Sonnenferne etwa 600 Millionen km von der Sonne entfernt. Bestimme Achsenlänge und numerische Exzentrizität der Bahnellipse."
Auch hier tritt wieder deutlich die vollkommene Bestimmtheit der Aufgabe hervor.

Zum Kapitel über Parabeln werden fünf Aufgaben über Wurfparabeln, Scheinwerfer, Brückenbogen, Gewölbe und durchhängende Überlandleitungen angegeben (S. 128, 129). Schließlich folgen

---

1) Gerade diese Abschnitte wurden in den sechziger Jahren wohl nur selten unterrichtet. Ein Grund könnte darin gelegen haben, daß beispielsweise in Baden-Württemberg aufgrund des Mathematiklehrermangels anstelle der vorgesehenen fünf Mathematikstunden nur vier Stunden pro Woche unterrichtet wurden.

auf S. 160 zwei Aufgaben über Sonnenuhren, die sich als integrierte Wiederholung für Kegelschnitte eignet. Die Aufgabe ist gut geeignet, das Phänomen der Sonnenuhr zu durchleuchten.
Die Anwendungsaufgaben von WÖRLE/KRATZ/KEIL (1962) ähneln denen von LAMBACHER/SCHWEIZER. Die Anwendungen beschränken sich meist auf die Physik und sind in der Weise vormathematisiert, daß die notwendigen Daten vorhanden und die Fragestellung festgelegt und der Einsatz bestimmter mathematischer Methoden offensichtlich ist.
Z.B. Aufgabe 17 (S. 284): "Ein stetiger Wachstumsvorgang gehorcht der Differentialgleichung $y' = 0{,}02\ y$. Zur Zeit $t = 0$ war die Anzahl der Individuen 3000. Wie groß ist ihre Zahl $t = 50$ Zeiteinheiten später?"

In den betrachteten Unterrichtswerken werden die einzelnen Kapitel immer nach demselben Prinzip aufgebaut. Die Erarbeitung eines mathematischen Inhalts wird innermathematisch motiviert. Dann folgt eine Vielfalt von Aufgaben, in denen das erworbene Wissen innermathematisch angewendet wird, und anschließend kommen in einem abschließenden Teil einige Anwendungen meist unter dem Thema "vermischte Aufgaben" usw.. Nicht beachtet wird, daß Umweltsituationen den Anstoß zur Entwicklung mathematischer Sätze sein können.

In den Büchern der Mittelstufe ist die Situation bezüglich der Anwendungen nicht anders (vgl. beispielsweise LAMBACHER/SCHWEIZER 1957 oder TITZE 1971).

Rückblickend ist für die Epoche (etwa 1905-1970), die sich am Meraner Lehrplan orientierte, festzustellen, daß sich die Reformideen nur in bezug auf die mathematischen Inhalte durchgesetzt haben. An den Rand gedrängt wurde das 3. Hauptziel des Meraner Lehrplans - die Einbeziehung von Anwendungen in den Unterricht. KLEINs Kritik, die er am Mathematikunterricht um die Jahrhundertwende übte, gilt daher noch heute:

"Die Schüler der höheren Lehranstalten sind im allgemeinen noch zu wenig imstande, das Mathematische in den sich ihnen im Leben darbietenden Erscheinungen zu erkennen, und zwar ist die Ursache dafür vorzugsweise in dem Umstand zu suchen, daß die Anwendungen der Mathematischen Theorien vielfach in künstlich gemachten Beispielen bestehen, anstatt sich auf die Verhältnisse zu beziehen, welche sich in der Wirklichkeit darbieten." (KLEIN, 1904 , S. 354)

Allgemeiner noch: Die Schule hat es nicht verstanden, die Vorstellungen KLEINs von einem genetischen Unterricht auf breiter Front zu verwirklichen.

Schwierigkeiten, die damals bestanden, bestehen heute in wohl noch größerem Maße. Im augenblicklichen gymnasialen Mathematikunterricht scheint es fast aussichtslos, kurzfristig auf breiter Front eine angemessene Berücksichtigung der Anwendungen zu erreichen. Es wären dabei viele Hindernisse zu überwinden, z.B.

1. Die Lehrpläne berücksichtigen Anwendungen zu wenig.
2. Die Schulbücher berücksichtigen Anwendungen höchstens in Form von eingekleideten Aufgaben.
3. Die Lehrerbildung berücksichtigt Anwendungen zu wenig.
4. Die Lehrpläne fördern eine zu große Stoffülle, so daß man dem Schüler nicht die Zeit gibt, sich in Situationen einzuleben, in denen Mathematik angewendet werden soll; usw.

Auf Schwierigkeiten dieser Art, denen sich ein anwendungsorientierter und genetischer Unterricht gegenübersieht, werden wir in Kapitel II, 2.4 nochmals zurückkommen.

2.2 Anwendungen in Lehrplänen und Schulbüchern in Volks-, Grund- und Hauptschulen.

Bereits ein oberflächlicher Vergleich der Lehrpläne und Schulbücher der höheren Schulen mit denen der Volksschule zeigt, daß die Umwelt der Schüler in Volksschulen viel stärker berücksichtigt wurde. Konnten wir in den höheren Schulen nach den Anfangserfolgen der KLEINschen Ideen ein Nachlassen des Interesses für Anwendungen beobachten, so stellt sich das Sachrechnen als eine stetige Strömung dar, mit der Anwendungen in der Volksschule einen festen Platz hatten.
Ein Grund für die unbestrittene Stellung des Sachrechnens in der Volksschule könnte sein, daß sich hier bestimmte Vorstellungen von Fachdidaktikern wie KÜHNEL, FETTWEIS/ SCHLECHTWEG usw. mit Vorstellungen von Pädagogen trafen, denen zufolge die Volksschule die volkstümliche Bildung verwirklichen sollte.
Letzteres wird in Lehrplänen und Schulbüchern deutlich sichtbar:
Bis vor etwa 15-20 Jahren konnte man beobachten, wie einzelne Lehrervereine - etwa auf Kreisebene - die allgemeingültigen Lehrpläne auf die örtlichen Verhältnisse abstimmten und umarbeiteten. Diese Lehrpläne wurden veröffentlicht.
Der Lehrplan für den Kreis Biedenkopf (1925) fordert in der Vorbemerkung: "In allen Fächern und auf allen Stufen sind die Beziehungen der Unterrichtsstoffe zum heimatlichen Leben sorgsam zu pflegen: ... heimatliche Zahlen im Rechenunterricht, eigenartige Bauformen, altes Gebälk, Hausinschriften, Kratzmuster und dergleichen im Zeichenunterricht und Raumlehreunterricht, ... heimatliches Wirtschaftsleben in Naturlehre und Rechenunterricht."

Besondere Berücksichtigung finden Forderungen, die wir schon von KÜHNEL her kennen. Zwei sind im Rahmen unserer Thematik wichtig:

- "Die Sachaufgaben sind so zu stellen, daß der Rechengang nicht von vornherein offenliegt."
- "Selbständiges Aufgabenstellen im Rahmen von Sachgebieten" (S. 57).

Meines Erachtens geht man nicht zu weit, wenn man diese Forderung inhaltlich neben die von POLLAK (1976a, S. 111) erneut formulierte Forderung stellt, der zufolge es "exzellente Pädagogik" sei, dem Schüler und Studenten Situationen zu präsentieren, zu denen er erst angemessene Problemstellungen formulieren soll.

Es ist vielleicht interessant, eine formale Parallele zwischen dem Meraner Lehrplan und dem Biedenkopf-Lehrplan zu erwähnen. Beide stellen einen Höhepunkt in der Hinsicht dar, daß die Ideen von KLEIN bzw. KÜHNEL zum Thema Anwendungen weitgehend berücksichtigt werden. In nachfolgenden Lehrplänen wurden diese Gedanken langsam verwässert.

Einer der letzten mir bekannten, veröffentlichte und auf regionale Verhältnisse zugeschnittene Lehrplan ist der von der Kölner Lehrerschaft ausgearbeitete "Lehr- und Arbeitsplan der Volksschule" aus dem Jahre 1956.
In ihm wird als wichtigstes Quellenmaterial für das Sachrechnen der "Zahlenspiegel des Landkreises Köln" empfohlen. Außerdem sollen Schüler bestimmte Sachbereiche "zahlenmäßig erfassen und rechnerisch bewältigen" (S. 199).
Themen für Sachbereiche waren beispielsweise: aus dem Haushalt und von der Industrie usw. Jedoch fehlen Hinweise darauf, daß der Schüler selber Probleme formulieren, selber Daten sammeln sollte usw.

In diesem Lehr- und Arbeitsplan wurde der Lernvorgang im Raumlehreunterricht konsequent nach einem Schema aufgebaut, wie wir es später ähnlich formuliert bei OEHL und KARASCHEWSKI finden:
Ausgangspunkt der "Bildungsarbeit soll fast immer die kindliche Umwelt sein". Dann folgt eine Phase des "Erhellens und Erkennens" und schließlich des "Anwendens" (S. 225 ff.). Dieses Vorgehen wird uns später noch unter dem Stichwort "genetisches Prinzip" beschäftigen.
Jedoch wird dieses Vorgehen in den zugehörigen Schulbüchern nicht mehr deutlich erkennbar; weder in dem von der Kölner Lehrerschaft zu ihrem Lehrplan verwendeten Schulbuch "Die Welt der Zahl" (Crüwell Verlag), noch in der Neubearbeitung von 1967/68, wo W. OEHL die Ideen von einem genetischen Lernen, wie er sie in seiner Didaktik vertritt, hätte verstärkt einbauen können.

Die Einbeziehung "heimatlicher Zahlen" in das Sachrechnen erfolgte in Schulbüchern, die noch nicht von der "Neuen Mathematik" geprägt sind, in starkem Maße.
Ein besonders deutliches Beispiel ist "Aschendorffs Rechenbuch für Volksschulen" (1957), wo Aufgaben zu den Talsperren und der Holzwirtschaft im Sauerland, Kohleabbau im Revier, Braunkohleabbau in der Kölner Bucht, Zementproduktion in Ibbenbüren usw. gestellt werden.
Trotz dieses erfreulichen Umstandes, daß der Rechenunterricht an die Umgebung des Kindes angeschlossen wird, sind an den größten Teil der Rechenbücher, die vor dem Einschnitt, der durch die Neue Mathematik gezogen wurde, eine Reihe kritischer Anmerkungen zu machen:

WINTER (1976c, S. 338) nennt fünf Punkte, die ich zum Teil schon in 1.2 zitiert habe.

- "Es gab eine ausschließliche Beschränkung auf Rechenfälle des Lebens, die (direkt) mit den 4 'Grundrechenarten' zu lösen waren." Diese Einschränkung wirkte sich nachteilig auf die Vielfalt der zu mathematisierenden Situation aus und ist auch aus innermathematischen Erwägungen nicht befriedigend.
- "Der Sachrechenstoff wurde durchgehend an innermathematischen Gesichtspunkten organisiert." Das bedeutet, daß die mathematischen Operationen zur Lösung der Aufgaben vorgegeben waren.
- "Fragen des 'richtigen' Anschriebs und der 'richtigen' Sprechweise standen über Gebühr im Vordergrund."
- "Vorherrschend waren Text und Rechnung." Andere Darstellungsformenwaren nur dürftig vertreten.
- "Schließlich litt das Sachrechnen unter der von der Rechendidaktik selbst verhängten Distanz, ja Feindseligkeit gegenüber mathematischen Methoden und Begriffsbildungen."

Es kommen weitere Punkte hinzu:

- Der Modellbildungsvorgang wurde meist nur verkürzt verlangt. Insbesondere fehlte die Phase des Datensammelns.
- Es wurde kaum zwischen Modell- und Sachebene unterschieden.
- Der Anteil offener Probleme war zu gering gehalten, wenn überhaupt solche angeboten wurden.
- Die angebotenen Aufgaben nahmen zwar Bezug auf die Umgebung des Kindes, es fehlten jedoch weitgehend Probleme, die Kinder unmittelbar hätten betreffen können.
- Die gemeinsame mathematische Struktur von Aufgaben zu verschiedenen Sachgebieten wurde zu wenig herausgestellt.

Wenden wir uns nun den Schulbüchern zu, die unter dem Einfluß der "Neuen Mathematik" geschrieben wurden (vgl. etwa OEHL/ PALZKILL: "Die Welt der Zahl-Neu"(1973); LAMBACHER/ SCHWEIZER: "Rechnen und Raumlehre" Bd. I und II (1971, 1972)).

Welchen Platz nimmt hier das Sachrechnen in den Büchern der Grund- und Hauptschulen ein und welche Impulse erhielt es? Es ergibt sich hier kein einheitliches Bild. Nur eines kann durchgehend festgestellt werden.
Erstens: In neueren Schulbüchern wird erkennbar, daß Autoren von Datenmaterial, das auf kleine Regionen bezogen ist, abrücken. Ein Vergleich der Ausgaben "Die Welt der Zahl" (1967/68) und "Die Welt der Zahl-Neu" (1973) zeigt dies. Sicher steckt hinter diesem Vorgang das Streben der Verlage nach einem Schulbuch, das im ganzen Bundesgebiet zugelassen ist und dieses nicht mehr durch spezielle regionale Ausgaben abdeckt. Die in diesen neuen Büchern vorkommenden Sachaufgaben fallen zum Teil durch eine besondere Anonymität auf, so daß das Sachrechnen unverbindlich wird. Das Geschehen ist aus dem unmittelbaren Kontext herausgelöst und typisiert. Ein Auto fährt nicht mehr von Frickenhausen nach Neuffen, sondern von A nach B.
Zweitens: Der Anteil des Sachrechnens wird unter dem Druck der zusätzlich neu zu behandelnden mathematischen Inhalte zurückgedrängt. Das Sachrechnen erhält keine neuen Impulse. DIENES, einer der Initiatoren der Reformbewegung "Neue Mathematik", will diese ja unter ausdrücklicher Ausklammerung der Anwendungen vorantreiben. Die Aufmerksamkeit der Didaktiker richtet sich fast ausschließlich auf die rein mathematischen Strukturen. Die zu den neuen mathematischen Inhalten angebotenen Sachaufgaben sind überwiegend unbedeutend.

Einen bedeutsamen Kontrast zu dem größten Teil, der zwischen 1968-1975 erschienenen Schulbücher bildet das Unterrichtswerk von WINTER/ZIEGLER (1972), in dem das Sachrechnen einen besonderen Stellenwert hat. Hier sind wesentliche Vorstellungen von WINTER (vgl. I. 1.5) zum Sachrechnen verwirklicht. In einigen 1976 erschienenen Schulbüchern (wie "PLUS" und "GAMMA") wird ebenfalls eine solche Gegenbewegung zur "Neuen

Mathematik" erkennbar.
Aber auch in diesen neuen Büchern sind echte Anwendungen selten. In den Aufgaben werden kleinste Situationen mit dem nötigen Datenmaterial und der fertigen Frage dargestellt. Vom Schüler wird nicht verlangt, daß er den Modellbildungsvorgang durchläuft.

Es ist unbestreitbar, daß es beträchtliche Schwierigkeiten gibt, Anwendungen in Schulbüchern überzeugend zu präsentieren; es ist sogar unmöglich, wenn es sich um Probleme aus dem aktuellen Zeitgeschehen oder um Aufgaben ganz lokaler Art handelt. Neueste Tendenzen im angelsächsischen Raum zielen darauf ab, den Lehrer zu einem freien, schöpferischen Umgang mit Anwendungen zu befähigen oder ihn durch Materialien zu unterstützen, wie es verschiedene Gruppen in Form von "booklets" - Projekten oder die Förderung lokaler "Situationsbanken" beabsichtigen.

Kapitel II

PHILOSOPHISCHER HINTERGRUND EINES AUSGEWOGENEN MATHEMATIKUNTERRICHTS

Es ist das Ziel dieser Arbeit, einige der in Kapitel I referierten Ansätze in einer bestimmten Richtung weiter zu entwickeln und durch speziell konstruierte Beispiele zu konkretisieren. Damit die dabei verfolgten grundsätzlichen Intentionen deutlich werden können, ist es unerläßlich, diejenigen Grundpositionen ins Bewußtsein zu heben, welche die Diskussion über die Rolle der Anwendungen für die Mathematik und den Mathematikunterricht von alters her beherrschen. R. THOM (1973, S.259) hat mit Recht darauf hingewiesen, daß jede einigermaßen kohärente Mathematikpädagogik unvermeidlicherweise auf einer Philosophie der Mathematik gründet. Die Philosophie der Mathematik, auf der das vorliegende Konzept gründet, sieht die Mathematik als Gesamtphänomen, in dem Anwendungen und rein innermathematisches Arbeiten ihren gemeinsamen Platz haben und nicht nur unvermittelt nebeneinander stehen. Es interessiert uns m.a.W. eine Synthese zwischen Reiner Mathematik und Angewandter Mathematik einschließlich der Wechselwirkung zwischen beiden.

Es läßt sich nicht bestreiten, daß auch andere Grundauffassungen von der Mathematik möglich und je nach Situation auch sinnvoll vertretbar sind. Damit stellt sich die Frage, wie eine Entscheidung für eine bestimmte Grundauffassung für den Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen herbeigeführt werden kann. In jedem Fall ist diese Frage von verschiedenen Seiten aus zu prüfen. Eine mögliche Verfahrensweise, der hier gefolgt werden soll, besteht darin, zunächst von der Mathematik ausgehend eine Grundauffassung zu wählen, die der Mathematik als Gesamtphänomen gerecht wird, und anschließend zu prüfen, inwieweit ein

entsprechender Unterricht den Interessen und Möglichkeiten der Schüler, den gesellschaftlichen Forderungen und schulpraktischen Bedingungen gerecht werden kann. Außer der philosophischen Frage nach verschiedenen Grundauffassungen von der Mathematik, der im ersten Abschnitt nachgegangen werden soll, und der normativen Entscheidung für die sogenannte "ausgewogene" Grundauffassung, die im zweiten Abschnitt gefällt werden wird, behandele ich im dritten Abschnitt noch eine für die Kapitel III und IV grundlegende philosophisch-erkenntnistheoretische Idee, welche für das Verständnis des Wechselspiels zwischen Mathematik und Anwendungen eine Schlüsselrolle spielt, nämlich den Prozeß des Modellbildens.

1. Grundauffassungen von der Mathematik

In diesem Abschnitt versuchen wir, verschiedene Grundauffassungen von Mathematik zu beschreiben. Wir konzentrieren uns dabei auf drei idealtypische Grundauffassungen, deren verschiedenartige Überlagerungen ein ganzes Spektrum möglicher Grundauffassungen ausmachen.
Es sind dies einmal zwei extreme Standpunkte, die die Enden des Spektrums charakterisieren:
Vom ersten Standpunkt aus wird die Mathematik als eigengesetzliche, um ihrer selbst willen betriebene Wissenschaft betrachtet unter Ausklammerung der außermathematischen Anwendungen. Wir wollen diese Art der Einschätzung, bei der die Mathematik ausschließlich als Reine Mathematik gesehen und gelegentlich als "Königin der Wissenschaften" angesehen wird, kurz den autarken Standpunkt nennen.
Im Gegensatz dazu wird vom zweiten pragmatischen Standpunkt aus Mathematik als Hilfsmittel im Hinblick auf unmittelbare Anwendbarkeit, d.h. als "Magd", die anderen Wissenschaften oder der Technik dient, aufgefaßt.
Die dritte im folgenden dargestellte Grundauffassung nimmt im Vergleich mit den extremen Grundauffassungen eine vermittelnde Position ein. Sie würdigt sowohl den reinen als auch den angewandten Aspekt und versucht, ihre Wechselwirkung als wesentliche Quelle für den Erkenntnisfortschritt aufzuzeigen. Wir wollen dies im folgenden als ausgewogene Auffassung von der Mathematik bezeichnen.

Innerhalb des ausgewogenen Standpunktes sind drei Varianten identifizierbar:
Die PEIRCHESCHE oder verfeinerte pragmatische Sicht der Mathematik geht davon aus, daß ihre gesellschaftliche Bedeutung und ihre Rechtfertigung in der Anwendbarkeit liegt. Damit diesem Ziel optimal gedient werden kann, müssen Mathematiker jedoch auch in der Reinen Mathematik weiterforschen, damit ein Vorrat an potentiellen Modellen für die Erfassun-

gen von Realitäten angelegt werden kann, der dann für neue Anwendungsprobleme bereitsteht. Die Gewichte können auch umgekehrt verteilt werden. An die erste Stelle wird der Fortschritt der Mathematik gestellt. Die Anwendungen werden nur soweit verfolgt, als daß sie dem Ausbau des innermathematischen Wissens dienen. Schließlich ist eine Sichtweise zu erwähnen, bei der die Wechselwirkungen zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik zum Fortschritt beider genutzt werden.

Um Mißverständnissen des Lesers vorzubeugen, möchte ich betonen, daß dieser Abschnitt lediglich eine Darstellung der Grundauffassungen bringt, ohne eine Bewertung vorzunehmen. Es liegt mir fern, eine der drei Auffassungen absolut als "richtig" oder "falsch" zu bewerten. Jedoch wird sich eine der Auffassungen für den Unterricht an allgemeinbildenden Schulen als besonders ergiebig erweisen.

1.1 Mathematik als autarke Wissenschaft

Im folgenden wird unter dem Schlagwort "Mathematik als autarke Wissenschaft" eine Grundauffassung von der Mathematik dargestellt, die sich auf der Mathematik als "Reiner Mathematik" gründet. Die Fixierung dieser Grundauffassung erweist sich als schwierig, da Mathematiker sich nur selten über Mathematik äußern. Meist geschieht dies nur bruchstückhaft, so daß die Beschreibung der Grundauffassung eher einem Mosaik gleicht, als einem voll ausgemalten und zusammenhängenden Bild. Es ist zu beachten, daß es in der Geschichte keine geschlossene Strömung gegeben hat, in der zielbewußt die Mathematik als Reine Mathematik verfolgt wurde; vielmehr soll damit nur eine Tendenz umrissen sein, die aus Äußerungen von Mathematikern, in verschiedenen Zeitabschnitten zum Wesen der Mathematik, der Rolle in der Gesellschaft, der Möglichkeit zur Schaffung von Mathematik und insbesondere der persönlichen Einstellung zur Mathematik hervorgeht. Mehr als eine Tendenz kann auch gar nicht erwartet werden, da die Auffassungen von großen Mathematikern zu diesen Punkten doch sehr nuanciert sind.

1.1.1 Geschichtlicher Rückblick

Eine der bekanntesten und ältesten Äußerungen über Mathematik wird EUKLID zugeschrieben, der von einem Schüler nach dem Nutzen der Geometrie befragt, zu einem dritten gewendet, gesagt haben soll: Gebe ihm einen Obolus, damit er etwas für seine Mühe hat. Die dieser Antwort zugrundeliegende Einstellung ist, daß mathematisches Arbeiten seine Bedeutung in sich hat; die Frage nach dem äußeren Nutzen und der Anwendbarkeit wird als unbedeutend erachtet.

In dieser Richtung hat sich auch PLATO geäußert. Er zeigt eine fast religiöse Einstellung zur (reinen) Mathematik und kritisierte Mathematiker, "welche die Mathematik zur Lösung mechanischer Probleme verwandten. Er meinte, daß durch sie die Würde der Geometrie verletzt werde, indem sie diese vom unkörperlichen und intellektuellen zum körperlichen herabsinken ließen" (AHRENS, 1971).

Die Schönheit der Mathematik wird von vielen Griechen immer wieder gepriesen und oft über den Nutzen der Mathematik gestellt. PIER (1971) schreibt über ARISTOTELES: "Er erstrebt in der Mathematik die Pflege der Einfachheit, der Schönheit und der Harmonie", und PROKLOS stellt Nutzen und Schönheit der Mathematik folgendermaßen gegenüber: "Die anderen aber erklären, die auf die Sinnenwelt gerichteten Erfahrungswissenschaften seien nützlicher als ihre (der Mathematik) generellen Theoreme. So z.B. sei die Erdmessung (Geodäsie) nützlicher als die Geometrie, die Arithmetik des gemeinen Volkes nützlicher als die auf (abstrakte) Lehrsätze gegründete und die seemännische Sternkunde (Nautik) sei nützlicher als die allgemeine Astronomie ... . Solchen Behauptungen werden wir entgegentreten mit dem Nachweis der Schönheit der Mathematik ... Ordnung, Symmetrie, klare Bestimmtheit" (nach BECKER, 1964).

Außenstehenden ist es fast unmöglich, die der Mathematik innewohnende Ästhetik zu empfinden, da sie beträchtliche mathematische Kenntnisse voraussetzt. Deshalb steht man außerhalb der Mathematik dem Argument der Schönheit meist unverständig gegenüber. Nach dem Niedergang der Mathematik im Mittelalter und dem Aufblühen im 17. und 18. Jahrhundert, wo die Fortschritte in Mathematik, Physik und Technik auf das engste miteinander verbunden waren, folgte eine Zeit, in der die Ästhetik immer wieder als Argument für Mathematiktreiben angeführt wurde - Mathematik wurde manchmal als Kunst betrachtet. Z.B. äußerte sich POINCARE so: "Das Gefühl der mathematischen Schönheit, der Harmonie, der Zahlen und der Formen, der geometrischen Eleganz, das ist ein echtes ästhetisches Gefühl." Nicht nur die anschauliche geometrische Figur kann ästhetisch sein, sondern auch die Eleganz eines Gedankenganges oder die abstrakte Struktur. HAMILTON sagte von sich, daß die Mathematik seine Poesie sei (PIER, 1971, S.28).

Diese Einstellung zur Mathematik und viele Nuancierungen davon wurden besonders nach der 1. Hälfte des vorigen Jahrhunderts sichtbar, in einer Zeit, in der sich eine starke Aufspaltung der Mathematik in viele Einzeldisziplinen vollzog und viele Mathematiker nur noch auf schmalen Gebieten arbeiteten (vgl. KLINE, S.102).

Diese neue Entwicklung fand ihren Niederschlag in der Arbeitsweise der Mathematiker und in der Sicht und Einstellung zur Mathematik. Einige Mathematiker machten ihre Einstellung auch sichtbar, indem sie sich über das Wesen der Mathematik und ihre Motive, Mathematik zu treiben, äußerten. Als ein Markstein für das Heraufziehen einer neuen Sichtweise der Mathematik, bei der die Symbiose zwischen Reiner Mathematik und den Anwendungen keine Rolle mehr spielt, mag eine Bemerkung von JACOBI gelten. Er kritisierte die pragmatische Einstellung von FOURIER zur Mathematik, der seine Antriebe zu mathematischem Forschen ja aus physika-

lischen Problemen holte: Der "wahre" Grund für mathematisches Arbeiten sei "Zur Ehre des menschlichen Geistes."

HANKEL (1867) und CANTOR (1883)[1] sahen das Wesen der Mathematik in ihrer Autarkie, der Unabhängigkeit von der Realität. Für HANKEL war Mathematik "rein intellektuell, eine reine Theorie der Formen, die als Arbeitsgegenstand nicht die Gegenstände der Realität oder ihre Bilder, die Zahlen hat, sondern Gedanken, zu denen wirkliche Gegenstände gehören können, genauso wie das nicht nötig ist".

Diese Art von Freiheit findet sich in unserem Jahrhundert besonders deutlich in der abstrakten, axiomatischen Arbeitsweise von BOURBAKI, die großen Einfluß und Nachahmung im Unterricht an der Universität und später an den Schulen hatte und heute noch hat. Bevorzugt wird eine Arbeitsweise, die an der internen Logik und der Reorganisation der Mathematik selbst orientiert ist. Die Mathematik kann also Mathematiker mit Problemen beschäftigen, die aus der Mathematik selbst erwachsen. Sie kann so autark weiterwachsen, ohne Anregungen aus der Umwelt aufnehmen zu müssen, und dadurch eine Eigendynamik erzeugen, die sie weitertreibt. DIEUDONNE (1964) sieht die Eigendynamik als Hauptmotor für neuere Entwicklungen auf den Gebieten Kategorien, Funktoren, algebraische Geometrie usw. "As a final remark, I would like to stress how little recent history has been willing to conform to the pious platitudes of the prophets of doom, who regularly warn us of the dire consequences mathematics is bound to incur by cutting itself off from the applications to other sciences. I do not intend to say that close contact to other fields such as theoretical physics is not beneficial to all parties concerned; but it is perfectly clear that of all the striking progress I have been talking about, not a single one, with the possible exception of distribution theory, had anything to do with physical applications; and even in the theory of partial differential equations, the emphasis is now much more an internal and

---

1) Vgl. KLINE (1972)

structural problem than on questions having a direct physical significance, even if mathematics were to be forcedly separated from all other channels of human endeavour, there would remain food for centuries of thought in the big problems we still have to solve within our own science."

1.1.2 Die Position von G.H. HARDY

Über die in 1.1.1 dargestellten sporadischen Äußerungen einzelner Mathematiker geht G.H. HARDY (1967) in seinem autobiographischen Buch "A Mathematician's Apology" hinaus. HARDY geht in diesem Buch nicht so sehr auf Probleme ein, wie Arbeitsweisen von Mathematikern, Erkenntnisgewinn, Eigendynamik der Mathematik usw., vielmehr stellt er sein ganz persönliches Empfinden und Denken in den Vordergrund, das mit folgenden Fragen umrissen werden kann:

Welches sind Motive, Mathematik zu treiben? Was kann die Mathematik für einen "echten" Mathematiker bedeuten?
Auf den ersten Blick mag zwischen diesen Fragen und dem bisher Gesagten zum autarken Standpunkt keine enge Beziehung ersichtlich sein. Aber aus den Antworten und Grundpositionen, die HARDY bezieht, wird ein Zusammenhang schnell deutlich: In allen Fällen werden die Anwendungen der Mathematik als mathematisches Arbeitsgebiet nicht beachtet.

C.P. SNOW bezeichnet HARDY in einem Vorwort zu dessen "Apology" als den reinsten aller reinen Mathematiker.
HARDY wollte in seiner Apology nur einen Teil der Mathematiker verteidigen, d.h. die reinen Mathematiker, deren Erkenntnisse "schön" und "signifikant" sind, d.h. die allgemein genug, nicht überspezialisiert sind, weiteren Fortschritt in der Mathematik erzeugen und die man in natürlicher und erleuchtender Weise mit einem großen Teil anderer mathematischer Ideen in Beziehung bringen kann (S.99).
Diese reinen Mathematiker nannte HARDY die "wirklichen" Mathematiker; sie sind kreative Künstler ("creative

artists"). Die Ernsthaftigkeit ihrer mathematischen Sätze liegt nicht in möglichen Anwendungen und deshalb ist "wirkliche" Mathematik von den Anwendungen unabhängig.
In der Öffentlichkeit bedarf jedoch die "wirkliche" Mathematik im Gegensatz zu den Anwendungen, deren Nutzen in der Technik offensichtlich ist, einer Verteidigung, da das öffentliche Ansehen der Mathematik größtenteils auf "ignorance and confusion" (S.65) gründet.

HARDY baute die Rechtfertigung der "wirklichen" Mathematik auf der Beantwortung zweier Fragen auf:

1. Ist "die Arbeit, die er (der "wirkliche" Mathematiker) tut, es wert, getan zu werden?"
2. "Warum betreibt er sie, welches auch immer ihr Wert ist?" (S.66)

Zunächst beantwortete HARDY die zweite Frage. In ihrem Kern ist die Antwort eine Forderung nach einem Stück Selbstverwirklichung: Jeder soll das betreiben, was er am besten kann, besonders dann, wenn er es gut kann und nur wenige Personen auf dem Gebiet begabt sind (S.66-70).

Dieses Argument ist natürlich nicht spezifisch für die Mathematik, und HARDY wollte es genauso für einen Poeten, Handwerker, Leistungssportler usw. gelten lassen, da auf diese Weise die Vielfalt und Weite menschlichen Leistungsvermögens erhalten und sichtbar wird. Es wird also ein Freiraum gefordert, indem man unbefragt und spontan gewisse Dinge anpacken kann, ohne daß die Kreativität durch zu viele Skrupel eingeengt wird: "A man who is always asking 'Is what I do worth while?' and 'Am I the right person to do it?' will always be ineffective himself and a discouragement to others. He must shut his eyes a little and think a little more over his subject and himself than they deserve." (S.66)

Für HARDY gab es eigentlich nur zwei Gründe, warum ein wirklicher Mathematiker nicht der Mathematik nachgehen könnte und auf einem anderen Gebiet wohl nur Mittelmäßiges leisten sollte: wirtschaftliche Gründe oder das Alter, das mit einem Nachlassen origineller Ideen verbunden ist.
Die Antwort, die HARDY auf die erste Frage gab, kann in zwei Teile gegliedert werden. Im ersten Teil wird festgestellt, was Mathematik nicht kann:

"Wirkliche Mathematik ist harmlos, wirkungslos" (S.74), in dem Sinne, daß sie für den größten Teil der Gesellschaft unbedeutend ist, ihr keine Verbesserung des Lebensstandards, aber auch keine Verschlechterung bringt und nicht anwendbar ist.
Im zweiten Teil wird eine extrem subjektive Antwort gegeben, die von HARDY's Weltanschauung abhängt. "Wenn die Welt schlecht ist, findet der Mathematiker in der Mathematik einen unvergleichbaren Balsam. Denn die Mathematik ist von allen Künsten und Wissenschaften die abgelegenste, die strengste, und für einen Mathematiker sollte es von allen Menschen am einfachsten sein, Zuflucht zu finden, wo, wie B. RUSSELL sagt, 'one at least of our nobler impulses can best escape from the dreary exile of the actual world!' "(S.143)

Nach dieser Zufluchtsfunktion der Mathematik nannte HARDY noch die Ästhetik, die "wirkliche" Mathematik besitzt, und den Genuß und die Freude, die man bei ihrem Studium empfinden kann, auch wenn diese Mathematik beispielsweise zweitausend Jahre vorher entwickelt wurde. Weiter habe der wirkliche Mathematiker die Möglichkeit, Aussagen zu schaffen, die ewiggültig sind. Sie unterlägen nicht den Einwirkungen der Zeitläufe. Mathematischer Ruhm sei unvergänglich; er sei die "beste und verläßlichste Investition, falls man die nötigen Mittel dazu habe" (S.82).

HARDY's Auffassung von der Mathematik wäre unvollständig wiedergegeben, würde man nicht seine Einstellung darlegen, die er zur anwendbaren, zur unmittelbar nutzbringenden Mathematik hatte, also zu der Mathematik, die sich eventuell über die Naturwissenschaften, Technik, Gesellschaftswissenschaften, in denen sie angewandt wird, auf das tägliche Leben des Menschen auswirkt. Er nannte diese Mathematik die "triviale" und hielt sie für "nicht schön". Ihre schlechten Auswirkungen - nämlich im Kriege - überwiegen die guten. Diese Mathematik macht erst den totalen Krieg möglich (S.152). So erstaunt es auch nicht, daß HARDY die Arbeit der angewandten Mathematiker geringschätzte:"Aber ist nicht die Position eines gewöhnlichen angewandten Mathematikers in bestimmter Weise mitleiderregend? Wenn er nutzbringend arbeiten will, muß er eintönig arbeiten und kann seiner Einbildungskraft nicht freien Lauf lassen, auch wenn er es wollte ... . Die in der Vorstellung geschaffenen Welten sind soviel schöner als die eintönig konstruierte Wirklichkeit; und die meisten Entwicklungen, die der Phantasie eines angewandten Mathematikers entstammen, müssen wieder verworfen werden, sobald sie geschaffen wurden, ... weil sie den Tatsachen nicht gerecht werden." (S.135)

Zusammenfassend können wir HARDY's Position mit seinen Worten beschreiben: "Der 'wirkliche' Mathematiker hat seine Daseinsberechtigung nur in der Welt der Mathematiker, denn außerhalb ist er nutzlos."

Ein Rückblick über den gesamten Abschnitt 1.1 zeigt, daß viele reine Mathematiker aus "Liebe" (COMBRIDGE) zur Mathematik arbeiten, emotionalen und ästhetischen Gewinn aus dieser Arbeit ziehen. Ihre Konzentration ist auf die mathematischen Objekte selbst gerichtet. Der mögliche Bezug zu realen Problemen wird nicht beachtet oder bewußt nicht erforscht. Reine Mathematiker sind Produzenten von Mathematik und kümmern sich nicht darum, ob diese später teilweise von Abnehmern als reines Hilfsmittel verwendet werden kann.

1.2 Mathematik als Hilfsmittel

In noch stärkeren Maße als bei der autarken Grundauffassung ergibt sich für den Hilfsmittelstandpunkt die Schwierigkeit, zusammenhängende Schilderungen oder auch nur kurze Beschreibungen von Vertretern dieses Standpunktes selbst zu finden. Dort, wo man die Mathematik als reines Hilfsmittel sieht, geschieht dies teils unbewußt, ohne daß diese Einstellung expliziert wird. Dieser Standpunkt wird überwiegend praktiziert, selten analysiert und nur gelegentlich wird im Gespräch darüber philosophiert. Will man den Hilfsmittelstandpunkt aufdecken, so muß er aus einem entsprechenden Verhalten und Arbeitsstil herausgelesen werden.

Die Grundeinstellung zur Mathematik als Hilfsmittel steht in einem mehr oder weniger ausgeprägten Gegensatz zu der Auffassung von einer autarken Mathematik. Dies wird schon aus der knappen Charakterisierung deutlich, die COMBRIDGE (1962) für den Hilfsmittelstandpunkt findet: "Für einige Leute besteht die Mathematik einfach in einer Sammlung von Handwerkzeugen, die nur nach ihrer Nützlichkeit eingeschätzt werden." Als Handwerkzeuge sind fertig ausgearbeitete Formeln, Algorithmen oder Kalküle zu verstehen, die zur Lösung mathematischer Modelle oder Aufgabenstellungen herangezogen werden, hinter denen reale Probleme stehen. Meist sind es Standardprobleme, wie sie sich Ingenieuren stellen.
Das Verhältnis zur Mathematik ist durch den unmittelbaren Nutzen bestimmt und bleibt auch auf diesen beschränkt. Der wirtschaftliche Erfolg steht im Vordergrund und ist oft alleiniger Antrieb zur Auseinandersetzung mit mathematischen Kalkülen. Die Mathematik wird nur solange beachtet, wie sie auf einen Beitrag zur Problemlösung hoffen läßt. Hat sie ihren Zweck erfüllt, wird sie beiseite gelegt. Weitergehende Beziehungen, wie sie zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik bestehen, werden nicht beachtet, nicht anerkannt oder auch für unbedeutsam gehalten. Man erwartet etwas von der

Mathematik, "ohne sich für die Schönheit zu interessieren" (DINGES, 1974) und ohne ihr selbst etwas zu geben. Eine "Ex- und hopp-Mentalität" ist unverkennbar. Es gibt kein Interesse, das der Mathematik als Ganzem gilt, da die Konzentration des Anwenders auf die Dinge außerhalb der Mathematik gerichtet ist, was in direktem Gegensatz zur autarken Auffassung steht.

Wie schon erwähnt, sind Äußerungen zur Mathematik als Hilfsmittel in der Literatur nicht sehr zahlreich auszumachen. Gleichwohl ist der Standpunkt verbreitet. Er findet sich als Grundhaltung in alten und jungen Kulturen oder Zivilisationen, in pädagogischen Strömungen der zurückliegenden Jahrzehnte, als Einstellung von Organisationen, Verbänden oder einzelnen Personen, besonders Naturwissenschaftlern, Technikern, Sozial- und Wirtschaftswissenschaftlern.

Im alten Mesopotamien und Ägypten wurde Mathematik als Hilfsmittel angesehen, "das aus unzusammenhängenden, einfachen Regeln bestand, die auf Fragen Antwort gaben, welche aus dem täglichen Leben des Volkes kamen. Mathematik wurde nicht um ihrer selbst willen betrieben" (KLINE, 1972, S.22).

Bei den Römern wurde die Auffassung von der Mathematik als Hilfsmittel konsequent und bewußt vertreten. Eine der wenigen zeitgenössischen Aussagen dazu stammt von CICERO (nach KLINE, S.178 zitiert). Sie macht gleichzeitig grundlegende Unterscheide zwischen Griechen und Römern in bezug zur Mathematik sichtbar. "Die Griechen hielten die Geometer in höchsten Ehren; entsprechend machte nichts außer der Mathematik derart brillante Fortschritte. Aber wir (die Römer) setzen für diese Kunst als Grenze ihre Nützlichkeit beim Messen und Rechnen." Hierin kann wohl ein Grund gesehen werden, daß die Römer in ihrer 1000jährigen Geschichte keine bedeutenden Mathematiker hervorgebracht haben. Das reine Nützlichkeitsdenken der Römer und ihre Zurückhaltung bei mathematischen Forschungen könnte u.a. dadurch gefördert

worden sein, daß die teils zeitgenössische griechische Mathematik ein reichhaltiges Reservoir potentieller Modelle angelegt hatte, auf die römische Ingenieure bei Bedarf zurückgreifen konnten.

Aus der Gegenwart bietet sich als ein Beispiel für die Einnahme des "Hilfsmittelstandpunktes" die Entwicklung in der Volksrepublik China an. Einem Bericht (POLLAK, KLEE 1976) einer amerikanischen Kommission, bestehend aus reinen und angewandten Mathematikern, ist zu entnehmen, daß die Hauptaktivitäten der Mathematiker in China auf die Anwendung bekannter Techniken aus der klassischen Angewandten Mathematik und Operations Research konzentriert sind. Es werden überwiegend "spezielle Lösungen für spezielle Probleme gesucht, die oft mit numerischen Methoden und der Verwendung von Computern gefunden werden. Das gibt einem großen Teil der Arbeit mehr den Charakter ingenieurmäßigen Vorgehens als der Arbeit eines angewandten Mathematikers". Schwerpunktmäßig werden Probleme aus der Produktionsplanung bearbeitet.

Es scheint jedoch keine Forschung zur Entwicklung neuer[1] Techniken für anwendungsfreudige Mathematik zu geben, wie für Differential- und Integralrechnung oder auch nur neue Variationen bekannter Techniken. Es wird aus dem Arsenal geschöpft, das die Mathematik auf einem Stand von vor 20 Jahren bereitstellte.

Neben diesen großen Strömungen, die vielleicht nur aus der geographischen Ferne oder der Ferne der Zeit so einheitlich anmuten, gibt es auch Berufsgruppen, bei denen die Einstellung zur Mathematik als Hilfsmittel überwiegt.

---

1) Die Geschichte legt die Vermutung nahe, daß totalitäre Staaten mit ihren Möglichkeiten zur Durchsetzung von Staatsmeinungen dazu neigen, einen extremen Hilfsmittelstandpunkt zu fördern und zu fordern. In der UDSSR war diese Einstellung wohl auch verbreitet; jedoch ist heute eine breite mathematische Forschung zu sehen. Auch neigen die Entwicklungsländer zum Hilfsmittelstandpunkt.

In der Lehre an Hochschulen bieten Naturwissenschaftler Mathematik für Biologen oder Chemiker usw. an, wo mathematische Techniken für bestimmte Problemstellungen vermittelt werden; innermathematische Zusammenhänge werden kaum aufgegriffen. Die Manipulation eines Kalküls steht im Vordergrund. Gelegentlich heißen solche Kurse auch "ad-hoc-Mathematik" oder "Service-Mathematik". Was dort im einzelnen an mathematischen Kenntnissen vermittelt werden soll und in den einzelnen Wissenschaften nutzbringend angewendet werden kann, ist langen Listen zu entnehmen. So hat NÄGERL (1973) einen Katalog für Medizin zusammengestellt, und der Bericht der "Royal Society" und des "Biological Education Comitee" von einer Arbeitstagung über das Thema "Mathematik für Biologen" (1975) enthält eine Liste über "den Typ von Mathematik, der von Schülern und Studenten in verschiedenen Gebieten der Biologie benötigt wird".

Diese Naturwissenschaftler schöpfen hier aus dem Reservoir fertiger Mathematik. STRUBECKER (1960) zählt in einem Aufsatz "Mathematik als Hilfswissenschaft der modernen Erfahrungswissenschaften" mathematische Methoden auf, die dort zu neuen Ergebnissen beigetragen haben. Die umgekehrte Beeinflussung der Mathematik durch die Naturwissenschaften wird nicht beachtet.

1.3 Das ausgewogene Bild der Mathematik

In den vorausgegangenen Abschnitten wurden zwei Grundauffassungen von der Mathematik dargestellt, die jede auf ihre Weise eine Beschränkung der Arbeitsmöglichkeiten in und mit der Mathematik mit sich bringen. Es zeigte sich, daß das Bild der Mathematik leicht unvollständig wird, wenn es aus subjektiver Sicht, aus der Sicht von Berufsgruppen oder ideologisiert betrachtet wird: Einerseits werden die Beziehungen zur Realität und anderen Wissenschaften übersehen, andererseits wird die Eigendynamik der Mathematik, das rein

innermathematische Arbeiten und auch die Bedeutung dieser Arbeit für Anwendungen nicht beachtet.

Im folgenden soll eine Grundauffassung von der Mathematik dargestellt werden, die vor allem aus einer längerfristigen Betrachtung der Genese von Mathematik erwächst. Man gelangt auf diese Weise zu einem Bild der Mathematik, in dem Anwendungen und innermathematisches Arbeiten ausgewogen dargestellt sind und vor allem aufeinander bezogen werden. Der Schwerpunkt der Darstellung liegt also weniger auf einer additiven Zusammenstellung beider Aspekte, vielmehr geht es um die wechselseitigen Beziehungen zwischen Reiner Mathematik und den Anwendungen. Sie kann an der Entwicklung einzelner mathematischer Disziplinen, aber auch an dem Werk großer Mathematiker illustriert werden. Interessanterweise gibt es einen Pragmatismus, der aus ganz verschiedenen Anliegen oder Sichtweisen heraus das Wechselspiel zwischen Anwendung und Reiner Mathematik fördert. In der einen Sichtweise steht die Förderung der Mathematik im Vordergrund, wobei sich die Anwendungen als eine weitertreibende Kraft erweisen. Aus der anderen Sicht liegt "das Wohl" der Anwendungen im Vordergrund, das u.a. dadurch gefördert wird, daß die Reine Mathematik in die Lage versetzt wird, ein Arsenal an potentiellen Modellen bereitzustellen. Somit ergibt sich eine fruchtbringende Abhängigkeit zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik. Die beiden Sichtweisen pointieren nur auf verschiedene Weise das Wechselspiel.

Es soll hier gleich einem möglichen Mißverständnis vorgebeugt werden: Mit der Grundauffassung vom ausgewogenen Bild der Mathematik wird nicht die Erwartung verknüpft, daß der einzelne Mathematiker gleich intensiv an der Entwicklung Reiner Mathematik und an den Anwendungen von Mathematik arbeiten soll, vielmehr ist hier die Ansicht von F. KLEIN anzuführen, demzufolge eine Arbeitsteilung oder Schwerpunktbildung auf Reine Mathematik oder Anwendungen möglich ist.

Jedoch soll für die Aufrechterhaltung des Zusammenhangs gesorgt werden (KLEIN, S.17, 1933). Dies kann in verschiedenen Bereichen geschehen: Erstens können interdisziplinäre Forschungen inszeniert werden und in Teamarbeit oder auch durch einzelne Wissenschaftler erledigt werden, die in ARCHIMEDES, NEWTON, EULER, GAUSS, J.V. NEUMANN oder THOM ihr Vorbild haben, da diese in gleichem Maße reine Mathematiker und angewandte Mathematiker oder Naturwissenschaftler waren. Zweitens ist die Lehre verpflichtet, bestehende Verbindungen zwischen Mathematik und Realwissenschaften zu tradieren und zu vertiefen.

1.3.1 Mechanismus der Genese von Mathematik in einer Beschreibung von D. HILBERT

Die Genese von Mathematik ist sicher ein vielschichtiger Vorgang, der unter verschidenen Gesichtspunkten betrachtet werden kann. Für unser Anliegen ist es sinnvoll, unter dem Aspekt der Beziehungen zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik zunächst in prägnanter und anschaulicher Form einen Eindruck von der Genese von Mathematik zu vermitteln. Für diesen Zweck eignet sich eine Beschreibung von HILBERT (zit. nach HENGST, 1971). In den folgenden Abschnitten wird diese Beschreibung weiter ausgebaut und durch Beispiele erläutert.

HILBERT beschreibt nun die Entstehung und Fortentwicklung von Mathematik folgendermaßen.

"Sicherlich stammen die ersten und letzten Probleme in jedem mathematischen Wissenszweig aus der Erfahrung und sind durch die Welt der äußeren Erscheinung angeregt worden... . Bei der Weiterentwicklung einer mathematischen Disziplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermutigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbständigkeit bewußt. Er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äußere Anregungen allein durch logisches Kombinieren, durch Verallgemeinerungen, Spezialisieren, durch Trennen und Sammeln

der Begriffe in glücklicher Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund."

In andere Worte gefaßt: Mathematik kann auch aus sich selbst heraus weiterexistieren, und mathematische Forschung entsteht auch an innermathematischen Problemen. Erst diese Einsicht garantiert, daß der autarke Standpunkt möglich ist, denn Mathematik kann sich trotz Ausblendung der Umwelt und ihrer außermathematischen Anwendbarkeit weiterentwickeln. Aber dabei bleibt es nicht. HILBERT sieht das Wesen der Mathematik nicht nur darin, daß die Entwicklung einer mathematischen Theorie nur anfangs eines Anstoßes von außen bedarf und anschließend sich rein innermathematisch entwikkeln wird. Die realen Probleme können fortgesetzt auf die mathematische Forschung einwirken:

"Inzwischen, während die Schaffenskraft des reinen Denkens wirkt, kommt auch wieder von neuem die Außenwelt zur Geltung, zwingt uns durch die wirklichen Erscheinungen neue Fragen auf." HILBERT weist also deutlich auf die anregende Wirkung der Außenwelt auf die Mathematik hin.

Die Dynamik der Entwicklung von Mathematik gestaltet sich oft sehr unterschiedlich. Einerseits gibt es mathematische Disziplinen, die nur in wenigen Fällen Anregungen aus der Umwelt aufgenommen haben; andere wiederum sind auf das Engste über lange Zeit mit den Anwendungen verbunden, und die Richtung ihrer Fortentwicklung wird von den Anwendungen bebestimmt. Umgekehrt finden sich einzelne reale Probleme, die verschiedene mathematische Forschungen beeinflußt haben. So ist die Himmelsmechanik ein Gebiet, das über 2000 Jahre hinweg der Mathematik fruchtbare Probleme gestellt hat.

Es soll hier noch angemerkt werden, daß HILBERT die Beziehungen zwischen Mathematik und Anwendungen vom Standpunkt der Mathematik aus betrachtet.
Er hat mehr das "Wohl" der Mathematik im Auge als umgekehrt die Bedeutung der Mathematik für die Außenwelt. Wir werden auf diesen Punkt in 1.3.5 nochmals zu sprechen kommen.

1.3.2 Bedeutung der Anwendungen für die Mathematik - Meinungen und Fallstudien

Die Bedeutung der Anwendungen für die Fortentwicklung der Mathematik wurde in den vergangenen Jahrzehnten unterschiedlich eingeschätzt. Während Mathematiker wie HARDY oder DIEUDONNÉ (vgl. 1.1) auf die Eigendynamik der Mathematik setzen, weisen andere wie KLEIN, HILBERT, COURANT oder THOM auf die Bedeutung von realen Problemen für die Weiterentwicklung der Mathematik hin. In einer Bemerkung von J. v. NEUMANN (1974, S.30) werden die vitalen Beziehungen der Mathematik zur Realität deutlich herausgestellt:

"Das wesentliche Merkmal der Mathematik ist meiner Ansicht nach ihre ganz besondere Beziehung zu den Naturwissenschaften oder, allgemeiner ausgedrückt, zu jeder Wissenschaft, die die Erfahrungen auf einer höheren Ebene als der rein beschreibenden interpretiert... .
Einige der besten Ideen der modernen Mathematik (ich glaube, die besten) haben ihren Ursprung ganz eindeutig in den Naturwissenschaften."
Dies gilt nicht nur für die moderne Mathematik. Aus allen Epochen, in denen mathematisch geforscht wurde, gibt es Beispiele, wie reale Problemstellungen mathematisches Arbeiten beeinflußt, ausgelöst und vorangetrieben haben.

Zunächst sollen einige Meinungen bekannter Mathematiker zusammengestellt werden, aus denen die Wertschätzung und Bedeutung der Anwendungen für die Mathematik ersichtlich wird, daran schließen sich einige Fallstudien an, aus denen die

belebende Kraft der Anwendungen deutlich wird. Dadurch erfahren die zuvor geäußerten Meinungen einen realen Hintergrund.

Über die gegenseitige Beeinflussung von realen Problemen und Mathematik ist verstärkt ab etwa 1850 nachgedacht und gesprochen worden. Ein Anlaß dazu könnte der im 19. Jahrhundert einsetzende Trend gewesen sein, die Mathematik losgelöst von den engen Bindungen an Naturwissenschaft und Technik voranzutreiben. Welche Befürchtungen manche Mathematiker mit diesem Trend verbanden und welche Bedeutung sie den realen Problemen zumaßen, verdeutlichen einige Zitate (zit. nach KLINE, 1972, S.1037 ff):
KRONECKER in einem Brief an HELMHOLTZ: "Deine praktischen Experimente mit gesunden und interessanten Problemen werden der Mathematik eine neue Richtung und neuen Impuls geben... Einseitige und introspektive mathematische Spekulationen führen in sterile Gebiete."
FOURIER (1824): "Das eingehende Studium der Natur ist die fruchtbarste Quelle mathematischer Entdeckungen. Dieses Studium bietet nicht nur ein wohlbestimmtes Ziel an, sondern auch den Vorteil, vage Fragen und nutzlose Rechnungen auszuschließen ... Die fundamentalen Ideen sind solche, welche Ereignisse der Natur darstellen."
E. PICARD (1908) warnt vor der Tendenz zur Abstraktion und bedeutungsloser Probleme. Von F. KLEIN (1897) sei nur eine von vielen Bemerkungen angeführt: "Es besteht eine große Notwendigkeit, die reine Mathematik und diejenigen Teile der Physik, in welchen sie ihre wichtigsten Anwendungen findet, in engen Kontakt zu bringen, welcher sich in den Arbeiten von GAUSS und LAGRANGE als so erfolgreich erwiesen hat." Diese Äußerung kann durchaus als Grundlage für KLEINs hochschul- und bildungspolitisches Programm genommen werden, wie es in Kapitel I zusammengestellt ist und wie es teilweise COURANT in den USA zu verwirklichen suchte.

Aber auch in den vergangenen zehn Jahren gab es Stimmen, die vielleicht unter dem Eindruck einer überwiegend zu den Realwissenschaften beziehungslosen Lehre und Forschung an den Mathematischen Seminaren eine stärkere Beachtung der Umwelt forderten. Das zeigt sich an manchen neugegründeten Mathematischen Instituten (DINGES, 1974) und wird auch aus Forderungen von HILTON (1974) oder THOM (1974) deutlich.

Die Bedeutung der Anwendungen für die Mathematik läßt sich an Beispielen aus der Antike bis zur Gegenwart nachweisen. Die Beispiele werden überwiegend stichpunktartig aufgeführt.

In den Werken griechischer Mathematiker finden sich explizit nur wenige Aussagen, wie die einzelnen Arbeiten inspiriert und motiviert wurden. Eine Ausnahme bildet die Äußerung von PTOLEMÄUS, einem der Begründer der Trigonometrie. Er betonte, daß er an ihr gearbeitet habe, um den Weg und die Position von Himmelskörpern vorherzusagen und ein Hilfsmittel für das Erstellen von Kalendern, für die Navigation und die Geographie zu haben (vgl. KLINE, S.105 ff).

Auch wenn viele Arbeiten der Griechen formal und deduktiv geschrieben sind, so ergeben sich doch Hinweise, daß bei den Griechen die Mathematik aufs engste mit ihren Anwendungen verbunden war: EUKLID wird meist als Inbegriff eines reinen Mathematikers angesehen, jedoch ist das nur die eine Seite. Er schrieb auch Werke über Anwendungen der Mathematik in der Optik, Musik, Astronomie und Mechanik. KLINE sah in dieser bei vielen griechischen Mathematikern zu beobachtenden Vielseitigkeit den Grund dafür, daß sie soviel gesunde ('vital') Mathematik schufen. Die Mathematik der Griechen ist nicht als isoliertes Gebiet zu sehen. In der klassischen Periode umschloß Mathematik die Disziplinen Arithmetik, Geometrie, Astronomie und Harmonielehre; in der Alexandrinischen Zeit kamen die Fächer Geodäsie, Mechanik, Optik, Logistik (angew. Arithmetik) hinzu.

Die Mathematik mit ihrer alexandrinischen Vielfalt war bei ARCHIMEDES in einer Person vereinigt, dessen Werk wir kurz in 1.3.4 schildern.

Im 17., 18. und zum großen Teil auch im 19. Jahrhundert war der Fortschritt der Mathematik mit dem der Naturwissenschaften und Technik aufs engste verbunden. DESCARTES, KEPLER, HUYGENS, NEWTON, LEIBNIZ, EULER und FOURIER waren Mathematiker und Naturwissenschaftler zugleich. Es gibt in dieser Epoche wohl keinen Wissenschaftler, der in der Mathematik Wichtiges schuf und nicht auch an Naturwissenschaften interessiert gewesen ist.
An zwei Beispielen, die stellvertretend für viele andere stehen, wird die Abhängigkeit mathematischer Theoriebildung von realen Problemstellungen deutlich:

Das erste Beispiel betrifft die Differential- und Integralrechnung. Auslösende Problemstellungen waren
- das Tangentenproblem im Zusammenhang mit der Konstruktion optischer Linsen,
- die Flächen- und Volumenberechnung bei krummlinigen Begrenzungen. Hier gelang KEPLER ein wichtiger Beitrag mit seiner 'Dolichometrie' - der Vermessung von Fässern und ihrer zweckmäßigen Gestaltung (vgl. KLEIN, S.225 ff (1933); NEUMANN, S.33 (1974); KEPLER (1907)).
- die Beziehungen zwischen Beschleunigung, Geschwindigkeit und Entfernung und die Fragen der Himmelsmechanik lösten NEWTONs Fluxionsrechnung aus (vgl. COURANT, S.185 (1974), KLINE,S.342(1972)). Gerade hier zeigte sich, welche Flexibilität die Mechanik durch die mathematische Abstraktion erhielt, denn außerhalb der die Forschung anregenden Himmelsmechanik wurden anschließend große Erfolge erzielt.

Als zweites Beispiel wird die Darstellung allgemeiner Funktionen mittels trigonometrischer Reihen betrachtet. Die Hauptarbeit leistete FOURIER. Sein Arbeitsgegenstand waren Fragen der Wärmeausbreitung (vgl. KLINE, 1972, S.572 ff

und KLEIN, 1933, S.205 ff), welche von praktischem Interesse bei der Behandlung von Metallen in der Industrie und von wissenschaftlichem Interesse für die Temperaturbestimmung im Erdinnern ist. Als Ausgangsproblem formulierte FOURIER die Bestimmung der Temperatur T in einem homogenen Körper als Funktion der Raumkoordinaten x,y,z und der Zeit t.

Als Ansatz wurde die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial T}{\partial t}$$

aufgestellt, die er unter Formulierung spezieller Randwerte zu lösen versuchte. Dies führt auf die Behauptung, daß

jede Funktion f(x), die nur graphisch gegeben sein muß, im Intervall $(-\pi, \pi)$ darstellbar ist durch

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x).$$

Einen Beweis für diese Darstellbarkeit gelang DIRICHLET. (Es handelt sich dabei um eine rein innermathematische Tat.) FOURIER konnte sich auf Arbeiten von Daniel BERNOULLI und EULER stützen, die im Zusammenhang mit dem Studium der Schwingungsgleichung gewonnen wurden.
Generell läßt sich sagen, daß die Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen über ein Jahrhundert hinweg durch die auftauchenden physikalischen und technischen Probleme geregelt wurden.

Ab der Mitte des 19. Jahrhunderts wurde die Mathematik in viel stärkerem Maße durch innermathematische Probleme vorangetrieben, jedoch gab es immer wieder Beispiele, bei denen Naturwissenschaftenund in zunehmendem Maße Probleme aus den Gesellschaftswissenschaften Mathematiker herausforderten.

Ein Beispiel ist die Entwicklung der Hilbertschen Spektraltheorie, wie sie COURANT (1974, S.188 ff) darstellt: Flächen zweiten Grades können durch Koordinatentransformationen auf die Normalform $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = 1$ gebracht werden. Der Physiker Lord RALEIGH nutzt dieses Ergebnis für unendlich-dimensionale Räume, wie sie zur Beschreibung von schwingenden Systemen in Form eines Materiekontinuums (z.B. Draht) nützlich sind. HILBERT versuchte dieses Vorgehen in einer umfassenden Theorie, der Spektraltheorie, abzusichern. Diese erwies sich wiederum als nützlich, aber nicht als ganz ausreichend bei der Darstellung der Quantenmechanik.
J. v. NEUMANN gelang es, durch Erweiterung der Spektraltheorie den Erfordernissen der Physik zu entsprechen.

Ein zweites Beispiel zeigt, wie ein Problem aus den Wirtschaftswissenschaften ein mathematisches Arbeitsgebiet neu belebte und weitertrieb: Es handelt sich um die lineare Optimierung. Umgekehrt erwiesen sich beim Ausbau der linearen Optimierung Sätze und Rechentechniken als nützlich, die z.T. bis auf GAUSS zurückgehen und durchaus als zur Reinen Mathematik gehörig betrachtet werden konnten. Aus mathematischer Sicht ist die lineare Optimierung ein Teilgebiet der Theorie der linearen Gleichungen und Ungleichungen.
Die auslösende Aufgabenstellung war ein Transportproblem. Mathematisiert ist es die Suche nach einem Minimum einer Linearform $z = cx$ unter Beachtung von Restriktionen in Form von linearen Gleichungen und Ungleichungen:

$$Ax \leq b, \quad x \geq o.$$

DANTZIG entwickelte 1945 zur Lösung dieser Aufgabenstellung den Simplexalgorithmus, der wesentlich auf den GAUSS-JORDAN Transformationsregeln aufbaut und die Pivot-Auswahlregeln so festlegt, daß der Wert der Linearform mit dem

Basiswechsel monoton fällt. Da der Rechenaufwand für die Abarbeitung des Simplexalgorithmus von der Gestalt und Größe der Matrix A abhängt, suchte man früh nach Varianten des Simplexalgorithmus, bei denen nicht mehr die Matrix A, sondern veränderte Systeme betrachtet werden, die aber dasselbe Optimum liefern. Eine erste Variante ist der duale Simplexalgorithmus, den LEMBKE im Jahre 1950 vorstellte. Wesentlich ist, daß hier die transponierte Matrix A' bearbeitet wird, was je nach Form von A Vorteile erbringt.

Die duale Problemstellung lautet: Suche das Maximum von $z = ub$ unter Beachtung der Restriktionen $uA \geq c$, $u \geq o$. Die Bearbeitung des dualen Systems wird erst dadurch sinnvoll, daß Min cx = Max ub ist, vorausgesetzt, beide Systeme sind konsistent. Zum Beweis dieses Sachverhalts greift man übrigens auf einen Satz von FARKAS (1902) zurück: Das System $Ax = b$, $x \geq o$ ist genau dann lösbar, wenn für alle Lösungen von $uA \geq o$ gilt: $ub \geq o$.

Die vielseitige Verwendbarkeit der linearen Optimierung in der Wirtschaft erforderte bald die Auseinandersetzung mit der Zerlegung (Decomposition) von großen Ungleichungssystemen in verschiedene kleinere Systeme, wobei die Gesamtlösung aus den Lösungen der kleineren Systeme aufgebaut werden kann.

Methoden und Sätze der linearen Optimierung haben auch beträchtliche Wirkung auf die nichtlineare Optimierung. Eines der wichtigsten Beispiele ist das KUHN-TUCKER-Theorem (1951), in dem Aussagen über die Beziehung zwischen Sattelpunkten von Lagrangeformen nichtlinearer Funktionen und optimalen Lösungen nichtlinearer Optimierungsaufgaben hergestellt werden. Ausgangspunkt ist die Kenntnis über den linearen Fall. Der Sattelpunkt einer Lagrangeform bestimmt das Optimum der zueinander dualen Aufgaben.

Heute stellt die lineare Optimierung einen Kernbestandteil des interdisziplinären Forschungsgebietes "Operations Research" dar, bei dem besonders Mathematik und Wirtschaftswissenschaften zusammenspielen.

1.3.3 Die Bedeutung innermathematischen Arbeitens für Anwendungen

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir die Bedeutung realer Problemstellungen für die Weiterentwicklung und den Ausbau des mathematischen Gebäudes deutlich gemacht. Realwissenschaftliche Fragen können, wie wir gesehen haben, der Mathematik vorauseilen und Mathematiker zur Suche nach Lösungen für einzelne Probleme anregen, wobei sich dann Einsichten und Theorien ergeben können, die z.T. über die ursprünglichen Fragestellungen hinausgehen.

Zum vollen ("ausgewogenen") Bild der Wechselwirkung zwischen den Realwissenschaften und der Mathematik fehlt jedoch noch das umgekehrte Phänomen, nämlich der Einfluß innermathematischer Entwicklungen auf die Realwissenschaften, dem wir uns nun zuwenden wollen.

Ein Blick auf die Geschichte der Mathematik läßt unschwer Beispiele erkennen, wo mathematische Theorien rein innermathematisch entwickelt wurden und z.T. erst nach erheblichen Zeitabständen in neu aufgetauchten realwissenschaftlichen Fragestellungen angewandt werden konnten, und zwar unabhängig davon, ob es die Erfinder der mathematischen Theorien wünschten oder nicht.

Beispiel 1: Ein geradezu ironisches Beispiel ist die Anwendung zahlentheoretischer Forschungen (vgl. LEVINSON, 1970). HARDY rechnete die Zahlentheorie zur "wirklichen" Mathematik, die er als nutzlos, harmlos und insbesondere als nicht anwendbar auf das Militärwesen charakterisierte.

Später erweisen sich Theoreme aus der Zahlentheorie als grundlegend für die um 1950 entstandene Codierungstheorie, die ja bei der Nachrichtenübermittlung (auch im Kriege) von großer Bedeutung ist.

Beispiel 2: Ein weiteres Beispiel ist die Gruppentheorie (vgl. COURANT, 1974, S.192 ff.), deren Wurzeln auf die Bemühungen zur Lösung algebraischer Gleichungen zurückgehen. GALOIS (1811-1832) gelang hier der entscheidende Durchbruch. Der Gruppenbegriff erwies sich in den folgenden Jahrzehnten innermathematisch als besonders weittragend zur Behandlung von Symmetrien in Zahlentheorie und Algebra und zur Klassifizierung verschiedener Zweige der Geometrie nach Transformationsgruppen in F. KLEINs Erlanger Programm.

Ein erstes großes Anwendungsgebiet der Gruppentheorie ergab sich von 1920 an in der Quantenmechanik der Atomhülle und später in der Festkörper- und Elementarteilchenphysik aufgrund der Symmetrien, die in der Konfiguration und der Wechselwirkung der Elementarteilchen postulierbar sind. Es gelang auf diesem Wege, die Existenz neuer Elementarteilchen vorherzusagen.

Gruppen werden auch in der organischen Chemie zur Beschreibung optisch aktiver Substanzen und der Aufdeckung von Isomerien sowie in der anorganischen Chemie zur Beschreibung von Kristallgittern verwendet.

Unbeschadet dieser bedeutsamen Anwendungen wird die Gruppentheorie in einem nicht anwendungsorientierten Sinne als mathematische Disziplin weiterentwickelt (v. NEUMANN, 1974, S.33).

Beispiel 3: Die von BOOLE (1815-1864) entwickelte Boolesche Algebra ist eine Leistung, die ursprünglich ganz der Reinen Mathematik zuzurechnen war. RUSSELL ging sogar so weit zu behaupten, daß die Reine Mathematik von BOOLE entdeckt worden sei. Die Schaltalgebra als Modell der Booleschen Algebra kam ab 1945 beim Entwurf von Schaltungen insbesondere in der ersten Computergeneration zur Anwendung.

In ähnlicher Weise verhält es sich mit den Arbeiten von TURING und von CHURCH aus den Jahren 1936/37 zum Algorithmusbegriff und zum Problem der Berechenbarkeit. Etwa 10 Jahre später fanden die Überlegungen ihre Anwendung und technische Realisierung in den Computern (vgl. Fernstudienbrief "Theoretische Informatik I", Fernuniversität Hagen).

1.3.4 Illustration des ausgewogenen Bildes am Werk großer Mathematiker: ARCHIMEDES, GAUSS und ihre Zeitgenossen

Im folgenden soll aufgezeigt werden, daß die einleitenden Beispiele nicht singulär sind, sondern daß das Werk ganzer Schulen von Mathematikern durch die Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und realen Problemstellungen grundlegend beeinflußt oder sogar getragen wurde. Die Wissenschaftler, die dies leisteten, waren bis ins 19. Jahrhundert hinein meistens Mathematiker und Naturwissenschaftler in einer Person.

Die folgenden Ausführungen unterliegen mehreren Beschränkungen: Ich konzentriere mich darauf, Vertreter aus zwei Epochen höchster naturwissenschaftlich-mathematischer Blüte vorzustellen: der alexandrinischen Zeit und dem 17./18. Jahrhundert.

Grundlage der Darstellung sind die mathematikhistorischen Werke von O. BECKER (1964), M. CANTOR (1965), F. KLEIN (1967), M. KLINE (1972) und v.d. WAERDEN (1956).

Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, wenn ein Quellenstudium der Schriften verschiedener Mathematiker vorgenommen würde. Ich versuche deshalb, in kurzer Form einige für das Anliegen der Arbeit wichtigen Zusammenhänge und Daten darzustellen. Der Schwerpunkt der Ausführungen liegt auf den Arbeiten von ARCHIMEDES und GAUSS, jedoch möchte ich auch andere bedeutnde Mathematiker dieser Epochen heranziehen, um das Bild abzurunden.

Die alexandrinische Zeit

Zum Ausgang des vierten vorchristlichen Jahrhunderts erhob sich Alexandrien zum Kulturzentrum der Alten Welt. Damit verbunden war ein erneutes Aufblühen der Mathematik nach der klassischen griechischen Periode. Der Aufschwung ist u.a. mit den Namen ARISTARCHOS (ca. 300-250 v.Chr.), ERATOSTHENES (276-194 v.Chr.), ARCHIMEDES (287-212 v.Chr.), APOLLONIUS (262-190 v.Chr.) verbunden.

ARISTARCHOS von Samos wurde bekannt durch Entfernungsbestimmungen für Mond-Erde-Sonne, sowie Angaben über die Durchmesser dieser Himmelskörper. Für ihre Berechnung benötigte er den Sinus kleiner Winkel, wofür er ein Näherungsverfahren entwickelte.

ERATOSTHENES von Kyrene war ein Universalgelehrter: Mathematiker, Geograph, Historiker und Philologe zugleich. Von ihm stammen eine Bestimmung des Erdumfangs, der Entwurf einer Weltkarte, basierend auf der Erkenntnis, daß die Erde rund ist, sowie das berühmte Siebverfahren zur Primzahlbestimmung.

APOLLONIUS von Perga konzentrierte seine Arbeit auf die Astronomie und Kegelschnittlehre. Auf der Grundlage der Exzenter- und Epizykelhypothese schuf er eine theoretische Astronomie, die weniger darauf aus war, die Himmelsbewegungen physikalisch zu erklären, als vielmehr mathematisch zu beschreiben. In zweien seiner wichtigsten Sätze werden die Umkehrpunkte der Planeten von recht- und rückläufiger Bewegung berechnet. In den "Conika" faßte APOLLONIUS das bis dahin bekannte Wissen über Kegelschnitte zusammen und baute es in einem Maße aus, das weit über das hinausgeht, was heute in Schulbüchern über Analytische Geometrie behandelt werden kann.

Als der genialste Mathematiker des Altertums und einer der größten Mathematiker überhaupt, gilt ARCHIMEDES. Sein Werk erstreckt sich breit über Astronomie, Physik, Mathematik und Technik.
ARCHIMEDES entwarf ein Planetarium in Form einer Hohlkugel, in der die Bewegungen der Sonne, des Mondes und der fünf Planeten nachgeahmt wurden.
In der Physik formulierte ARCHIMEDES das hydrostatische Prinzip und das Hebelgesetz. An seinen Arbeiten über Schwerpunktbestimmung von Körpern und zur Stabilität eines schwimmenden Paraboloidsegments kann man die Wechselwirkung physikalischer und geometrischer Überlegungen schon erkennen: "... mehr als bei irgend einem früheren Schriftsteller ist die Mechanik mit der Geometrie verschwistert. Geometrische Betrachtungen feinster Art standen im Dienste der Mechanik - mechanische Lehren wurden aber zur Beweisführung geometrischer Sätze angewendet" (CANTOR, 1965, S.295 ff.).
Zwar ist die Entwicklung der Ideen mit einer wechselseitigen Beeinflussung von realen Problemen und der Entstehung von Mathematik im einzelnen nicht rekonstruierbar,

jedoch gibt ARCHIMEDES darüber Auskunft, welche Bedeutung bei ihm physikalische Vorstellungen bei der Herleitung von Flächensätzen und Sätzen über Volumen geometrischer Körper haben (zit. nach O. BECKER, S.56):
"... ich (habe) beschlossen, die Eigenart einer bestimmten Methode in diesem Buch auseinanderzusetzen, mit deren Hilfe du imstande sein wirst, gewisse mathematische Betrachtungen mittels der "Mechanik" anzustellen. Ich bin überzeugt, daß die Methode nicht weniger nützlich ist zum Beweis der Theoreme selbst. Denn einiges von dem, was mir auf "mechanische " Weise klar wurde, wurde später auf geometrische Art bewiesen, weil die Betrachtungsweise dieser "mechanischen" Art der strengen Beweiskraft entbehrt. Denn es ist leichter, den Beweis zustande zu bringen, wenn man schon vorgreifend durch die "mechanische" Weise einen Begriff von der Sache gewonnen hat, als ohne eine derartige Vorkenntnis".

Die "mechanische" Art der Betrachtung besteht darin, daß Teile einer Figur aufgewogen werden gegen Teile einer anderen einfacheren Figur, deren Maße bekannt sind.
ARCHIMEDES trennte klar zwischen

"1) den Mitteln, die uns dazu bringen, gewisse Theoreme für wahr zu halten, obwohl sie uns keine strengen Beweise verschaffen, und
2) den exakten Beweisen dieser Theoreme mit orthodoxen geometrischen Methoden, die erbracht werden müssen, bevor die Sätze als endgültig gesichert betrachtet werden".

(v.d. WAERDEN, 1956)

Diese Trennung von physikalischen und mathematischen Überlegungen ist bei ARCHIMEDES in viel stärkerem Maße ausgeprägt als später bei NEWTON oder LEIBNIZ (siehe KLINE, S.116 (1972)).

Zum Ruhm und zur Legendenbildung um ARCHIMEDES haben besondere ihm zugeschriebene Leistungen in der Mechanik beigetragen: die Entwicklung der ARCHIMEDISCHEN Schraube (einer Wasserpumpe), des Brennspiegels, von Katapulten, Kranen und schließlich das Experiment und die Berechnung zur Bestimmung des Silberanteils in der Goldkrone seines Königs HIERON.

Der ungarische Mathematiker RENYI hat die wissenschaftliche Sichtweise des ARCHIMEDES in einem fiktiven Dialog beschrieben, in dem er ARCHIMEDES u.a. folgenden Satz in den Mund legt: "Man kann die abstrakte Mathematik nicht von ihren Anwendungen trennen. Wer die abstrakte Mathematik ablehnt, versperrt sich den Weg zu ihren Anwendungen." (RENYI 1967, S.53)

Das 17. und 18. Jahrhundert

Nach der Alexandrinischen Zeit und dem Niedergang der Mathematik im Mittelalter begann im 17. Jahrhundert eine zweite Epoche höchster mathematischer Blüte. Beide Epochen haben gemeinsam, daß ihre führenden Vertreter sich gleichermaßen mit Mathematik und realen Problemen beschäftigten.

KLINE (1972, S.285 ff.) macht für das Aufblühen der Mathematik vor allem neu aufgetauchte Probleme aus Naturwissenschaft und Technik verantwortlich:

Die Neubeschreibung der Himmelsbewegungen nach der Kopernikanischen Hypothese, die mathematische Fassung der Perspektive aus der Kunst, der Entwurf von Linsen für die neu erfundenen Teleskope und Mikroskope, Kartographie und Schiffsbewegungen nach dem Aufschwung des überseeischen Handels, die Berechnung der Flugbahn von Kanonenkugeln usw.

Derartige Probleme haben im 17. Jahrhundert u.a. DESARGUES, PASCAL, FERMAT, DESCARTES, NEWTON und LEIBNIZ untersucht. Die Probleme, mit denen sich im 18. Jahrhundert und zu Beginn des 19. Jahrhunderts u.a. D. BERNOULLI, EULER, LAPLACE, LAGRANGE, LEGENDRE und GAUSS beschäftigten, sind noch vielfältiger.

PASCAL (1623-62) arbeitete wie DESARGUES auf dem Gebiet der projektiven Geometrie, beschäftigte sich aber auch mit Physik, vor allem mit Experimenten zur Vakuumerzeugung.

Nach KLINE (S.302(1972))wurden FERMAT und DESCARTES aus naturwissenschaftlichen Interessen, aber auch durch mathematikmethodologische Gesichtspunkte zu der Analytischen Geometrie angeregt. Beide arbeiteten u.a. am Brechungsgesetz der Optik. Insbesondere DESCARTES verfolgte Probleme der Linsenkonstruktion.

NEWTON (1642-1727) ist in seiner Vielseitigkeit und in der Bedeutung seiner Forschungen mit ARCHIMEDES und GAUSS zu vergleichen. Seine Hauptwerke beziehen sich auf die Mechanik, Optik und Infinitesimalrechnung.
NEWTON formulierte die grundlegenden Prinzipien der Mechanik (Trägheitsprinzip, Aktionsprinzip, Reaktionsprinzip) und entwickelte zur Behandlung mechanischer Probleme die Fluxionsrechnung, mit der er bis zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung vordrang.

LEIBNIZ (1646-1716) begründete unabhängig von NEWTON die Infinitesimalrechnung. Weitere Arbeitsgebiete waren Logik, Optik, Mechanik, Hydrostatik. Er entwarf eine der ersten Rechenmaschinen.

Ein Zeitgenosse von LEIBNIZ war JAKOB BERNOULLI (1654-1705). Von ihm stammen die berühmte Bernoullische Ungleichung und das Gesetz der großen Zahl. Er beschäftigte sich mit geometrischen Extremalproblemen, Evolution und der Untersuchung vieler Kurven.
Neben mathematischen Vorlesungen hielt er Vorlesungen über Physik und verfaßte Schriften über Astronomie.

Im 18. Jahrhundert gewannen die Mathematik und die Naturwissenschaften weiter an Breite, und eine Reihe bedeutender Wissenschaftler traten auf, die wiederum durch ihre Vielseitigkeit auffallen.

DANIEL BERNOULLI (1700-1782) arbeitete über Kettenbrüche, das Riccati-Problem sowie über Saitenschwingungen, kinetische Gastheorie und Hydrodynamik. Er gilt als der Begründer der "theoretischen Physik".

Der wohl bedeutendste Forscher des 18. Jahrhunderts ist LEONARD EULER (1707-1783). In seiner ersten Petersburger Zeit war er Professor für Physik und schrieb eine Analytische Mechanik, ein musiktheoretisches Werk sowie Arbeiten über Differentialgleichungen, Reihenlehre und Variationsrechnung. EULER wandte seine mathematischen Kenntnisse auf viele Gebiete der Physik an: Optik, Himmelsmechanik, Navigation und Ausrüstung von Segelschiffen, Kartographie.

Aus dem französischsprachigen Raum sind besonders die Mathematiker LAGRANGE (1736-1813), LAPLACE (1749-1827) und LEGENDRE (1752-1833) zu nennen. F. KLEIN rechnete sie in ihrer Denkweise zum 18. Jahrhundert gehörig, obwohl einige ihrer Hauptwerke erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts erschienen.

LAGRANGE begann seine Karriere an der Königlichen Artillerieschule in Turin und arbeitete wie EULER über Variationsrechnung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Differentialgleichung sowie an einer Analytischen Mechanik. Er sah u.a. die Möglichkeit, die Mechanik durch eine vierdimensionale Geometrie mit der Zeit als vierter Dimension zu beschreiben.

Das Hauptwerk von LAPLACE ist die "Mêchanique céleste", in der die wichtigsten damals bekannten Kenntnisse der Infinitesimalrechnung auf die Mechanik und Astronomie angewandt wurden.

LEGENDREs (1752-1833) Werk ist, wie ein von F. KLEIN (1967, S.60) angestellter Vergleich zeigt, ähnlich vielfältig wie das von GAUSS. LEGENDRE beschäftigte sich z.B. mit Zahlentheorie, elliptischen Integralen und dem Parallelenaxiom. Das Problem der Landvermessung in Frankreich führte ihn auf Sätze der Trigonometrie und eine theoretische Ausgestaltung des Vermessungswesens; er schlug die Winkeleinteilung in Neugrad vor. Probleme aus der Astronomie führten ihn auf die Methode der kleinsten Quadrate und die später nach ihm benannten Legendre Polynome.

In einer Gesamtsicht des 18. Jahrhunderts schätzt KLINE (1972, S.616) die Beziehungen zwischen Mathematik und Umwelt folgendermaßen ein: "Viel stärker als in irgend einem anderen Jahrhundert war die mathematische Arbeit durch physikalische Probleme direkt beeinflußt. In der Tat kann gesagt werden, daß das Ziel der Arbeit nicht die Mathematik war, sondern eher die Lösung physikalischer Probleme."

Auch für GAUSS (1777-1855) trifft zu, daß viele Arbeiten durch physikalische Problemstellungen ausgelöst wurden, insofern ist er noch ein Vertreter des 18. Jahrhunderts, andererseits nehmen bei ihm viele neue Entwicklungen des 19. Jahrhundert den Anfang, gerade auch was die Reine Mathematik und ihre Arbeitsweise betrifft. KLEIN (1967, S.6) sieht bei GAUSS in glücklicher Weise den Geist beider Epochen vereinigt.

Die ersten Arbeiten wie die Konstruktion des 17-Ecks und der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra sind der Reinen Mathematik zuzurechnen. 1801 entstand die erste astronomische Arbeit. Der Planet Ceres wurde entdeckt, war aber nur kurz zu beobachten. Es stellte sich das Problem, den Planeten wiederzuentdecken. Aus den nur wenigen vorliegenden Daten gelang es GAUSS, Positionen des Planeten vorherzusagen. Bei seinen Berechnungen bediente er sich Näherungsverfahren, die er aus diesem Anlaß entwickelt hatte. Im Anschluß daran schuf GAUSS ein umfangreiches Werk über Methoden zur Lösung von Problemen der Himmelsmechanik.

1809 übernahm GAUSS eine Professur für Astronomie in Göttingen, die er bis zu seinem Lebensende innehatte. Nach Arbeiten über die Pallas-Störungen, bei denen u.a. Betrachtungen über hypergeometrische Reihen und elliptische Integrale entstanden, wandte sich GAUSS der Geodäsie zu. Er erhielt den Auftrag, die Vermessung des Königreichs Hannover zu leiten. Bei diesem Projekt griffen theoretische Überlegungen und konkrete Meßarbeit aufs engste ineinander. GAUSS beschäftigte sich einerseits mit konformen Projektionen und geodätischen Linien.

Andererseits erfand GAUSS ein vielfach verwendetes Meßinstrument, den Heliotrop. Seine Arbeiten haben die Entwicklung der Geodäsie nachhaltig beeinflußt und gleichzeitig die Differentialgeometrie.
Nach der Geodäsie wandte sich GAUSS im Verein mit WEBER Arbeiten auf dem Gebiet des Elektromagnetismus zu. Die Anregung zur Auseinandersetzung mit diesem Problem kam von HUMBOLDT. Ein Ergebnis dieser Arbeit ist die Entwicklung des elektromagnetischen Telegraphen. Auf der mathematischen Seite entstand eine Potentialtheorie. In derselben Weise kann man eine Reihe von fundamentalen zahlentheoretischen Arbeiten aufzählen (z.B. die "Disquisitiones arithmeticae"), die vollkommen unabhängig von realen Problemstellungen entstanden waren.

Eine treffende Würdigung von GAUSS gibt KLEIN (1967, S.60): "Wenn wir uns nun fragen, worin eigentlich das Ungewöhnliche, Einzigartige dieser Geisteskraft liegt, so muß die Antwort lauten: Es ist die Verbindung der größten Einzelleistung in jedem ergriffenen Gebiet mit größter Vielseitigkeit; es ist das vollkommene Gleichgewicht zwischen mathematischer Erfindungskraft, Strenge der Durchführung und praktischem Sinn für die Anwendung bis zur sorgfältig ausgeführten Beobachtung und Messung einschließlich; und endlich, es ist die Darbietung des großen selbstgeschaffenen Reichtums in der vollendetsten Form."

1.3.5 Verschiedene Sichtweisen des ausgewogenen Bildes

Bisher wurden die Wechselwirkungen zwischen Reiner Mathematik und Anwendungen aus historisch-genetischer Sicht beschrieben. Im folgenden möchte ich drei verschiedene Sichtweisen ansprechen, in denen die aufgezeigten Wechselwirkungen voll gewürdigt werden, jedoch unterschiedliche Präferenzen gesetzt werden.

1. Sichtweise: Die erste Sichtweise, die hier angeführt werden soll, ist im vergangenen Jahrhundert von dem Philosophen, Mathematiker und Physiker C.S. PEIRCE (1839-1914) dargestellt worden und von ORMELL (1971; 1972 a,b), auf dessen Arbeiten ich mich im folgenden stütze, nochmals aufgearbeitet worden.
Charakteristisch für die PEIRCEsche Sichtweise ist eine Betrachtung und Einschätzung der Mathematik, bei der innermathematische Arbeiten als eine Dimension mathematischen Arbeitens gesehen, die auf ihre Bedeutung für die Gesellschaft und die Leistungsfähigkeit für die Realwissenschaften hin untersucht wird. Die entscheidende Frage ist: "Wie kann Mathematik der Gesellschaft möglichst optimal dienen?" Unter dieser Fragestellung erweisen sich mathematische Theorien als Reservoir potentieller Modelle für reale Phänomene, und so erfährt innermathematisches Arbeiten seine Berechtigung. Die Aufgabe eines Mathematikers besteht in der Entwicklung potentieller Modelle und der systematischen Suche nach Anwendungsbereichen. Das eigentliche Interesse gilt somit den Anwendungen. Dennoch ist das rein innermathematische Arbeiten wohlgelitten, weil sich die Anwendungen auf lange Sicht von der Quelle abschnüren würden, die in neuen Anwendungssituationen mögliche Hilfen herbeiführen könnten. Die aktuelle Forschung in der Reinen Mathematik hat ihre Bedeutung nicht so sehr

für die aktuellen Situationen, sondern für hypothetische, zukünftige Situationen und der Prognose möglicher Entwicklungen dieser Situationen; in dem, was einmal sein kann. Reine Mathematik ist Wissen auf Vorrat, das es gestattet, beim Auftauchen neuer Probleme diese möglichst verzögerungsfrei mit mathematischen Modellen zu erfassen. ORMELL sieht in der Entwicklung mathematischer Theorien eine Tätigkeit, die den Realwissenschaften den Weg ebnet. (In 1.3.3 wurden einige Beispiele dafür vorgestellt.) Aus dieser Sicht ist Mathematik die Wissenschaft von der Konstruktion und Untersuchung potentieller Modelle und deren Bearbeitung und Interpretation in der Wirklichkeit. Die pragmatische Sichtweise von PEIRCE wird aus der Einstellung zur Ästhetik der Mathematik deutlich. Für die Gesellschaft ist es keine Begründung, wenn die Mathematik wegen ihrer Ästhetik betrieben wird. Ästhetischer Genuß läßt sich einfacher und für mehr Leute verständlich in der Kunst oder Musik erzeugen. Mag auch für den einzelnen Mathematiker die Ästhetik ein wesentlicher Gesichtspunkt sein, die Gesellschaft unterstützt und bezahlt ihn aus seiner Bedeutung für die Anwendungen.

Der PEIRCEsche Standpunkt darf nicht mit der in 1.2 dargestellten Grundauffassung von Mathematik als Hilfsmittel verwechselt werden. Er könnte jedoch durch Verfeinerung aus dieser Grundauffassung erwachsen. In beiden Fällen hat die Mathematik dienende Funktion, jedoch beinhaltet der PEIRCEsche Standpunkt eine klare Sicht der Beziehungen zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik, die die Vielfalt mathematischen Arbeitens garantiert.

2. Sichtweise: In gewissen Sinne kann man in den Aussagen von HILBERT (siehe 1.3.1) und NEUMANN (siehe 1.3.2) Anhaltspunkte finden, die eine Umkehrung der PEIRCEschen Sichtweise darstellen. Es wird ein Standpunkt bezogen, der

innerhalb der Mathematik liegt und durch Fragen folgender Art charakterisiert ist: "Wie entsteht Mathematik und wo beziehen Mathematiker ihre Anregungen her?" Es geht also um den Fortschritt und das Wohl der Reinen Mathematik. Die realwissenschaftlichen Probleme ordnen sich der Mathematik unter und dienen ihr. Diese Sichtweise ist eine Position der Selbstbeschränkung, hinter der das Anliegen steht, der Mathematik möglichst optimal zu dienen.

Mit der Grundauffassung von der Mathematik als autarker Wissenschaft hat die 2. Sichtweise die Betonung der innermathematischen Interessen gemeinsam; durch die Beachtung der Beziehungen zu den Realwissenschaften stellt die 2. Sichtweise jedoch eine wesentliche Erweiterung der Grundauffassung von der Mathematik als autarker Wissenschaft dar.

3. Sichtweise: Schließlich soll noch eine dritte Sichtweise angeführt werden, die eine Synthese der beiden vorigen Sichtweisen darstellt: Die Wechselwirkungen zwischen Mathematik- und Realwissenschaften sollen zum Nutzen beider eingesetzt werden.
Die Position scheint mir am besten geeignet, um eine partnerschaftliche Kooperation der Schulfächer zu ermöglichen und den vielfältigen Anforderungen eines allgemeinbildenden Schulsystems gerecht zu werden (siehe den folgenden Abschnitt 2). Deshalb soll von dieser Sichtweise aus das Konzept eines ausgewogenen Mathematikunterrichts verfolgt werden.

1.3.6 Hinweise auf die Aktualität der Diskussion um Grundauffassungen

Es gibt einige Hinweise dafür, daß sich die Diskussion um Grundauffassungen der Mathematik ihre Frische bewahrt hat. Ein Forum für die aktuelle Diskussion ist die 1978 erstmals erschienene Zeitschrift "The Mathematical Intelligencer". Ein Ziel der Zeitschrift ist es philosophische Kontroversen und historische Perspektiven der Mathematik zu diskutieren. Die Beiträge die für das Thema "Grundauffassungen" von Bedeutung sind beschäftigen sich kaum mit extremen Grundauffassungen, sondern stellen die Beziehungen zwischen Mathematik und Anwendungen in den Mittelpunkt der Überlegungen. Der Grundtenor der Aufsätze ist einhellig: Auf dem Gebiet der Forschung müssen Mathematik und Anwendungen in stärkerem Maße zusammenarbeiten. Einige Autoren fordern dies auch für die Studentenausbildung und den Schulunterricht. Im Detail ergeben sich Hinweise auf die Arbeitsweisen von Mathematikern, interessante Standpunkte und z.T. gegenläufige Einschätzungen der Situation.

HERMANN (1978) stellt einen wesentlichen Unterschied zwischen dem Wissenschaftsbetrieb kurz nach der Jahrhundertwende und dem von heute heraus. Für die ältere Mathematikergeneration ist charakteristisch, daß sie mit den Entwicklungen in Naturwissenschaften insbesondere der Physik auf dem laufenden war ("au courant") und sich in dieEntwicklungen einschalteten, wenn sie Möglichkeiten sahen.
Heute ist die Kluft zwischen den Mathematikern und den Wissenschaftlern die Mathematik anwenden sollen größer geworden. Es gibt "kein intellektuelles Kontinuum" zwischen Mathematik und Realwissenschaften mehr. Die Reinen Mathematiker kennen sich in den Realwissenschaften nicht mehr aus.[1] Die Mathematik ist

[1] Zur gleichen Beurteilung kommt M. KLINE (1978)

zu esoterisch geworden und die Reinen Mathematiker vertrauen heute zu sehr auf die Geschichte, wo sich immer wieder Anwendungen für die Reine Mathematik fanden. Gerade diesen Prozess sieht HERMANN gefährdet, da die Ausgangssituation sich geändert hat. Als Beispiel für das Abreißen des intelektuellen Kontinuums wird die THOM sche Katastrophentheorie erwähnt."THOM wanted to serve as the strategist of a new mathematical biology. Unfortunately for him, there were no competent tacticians around". Unter "Taktiker" werden hier Wissenschaftler verstanden, die einerseits die THOMsche Mathematik beherrschen andererseits über fundierte realwissenschaftliche Kenntnisse verfügen um weitreichende Beziehungen herzustellen.
HERMANN fordert deshalb die verstärkte Zusammenarbeit von Reinen Mathematikern mit Realwissenschaftlern die über gute mathematische Kentnisse verfügen.
Neben diese die Wissenschaft als Ganzes betreffenden Betrachtung geht HERMANN auch auf den einzelnen Wissenschaftler ein. Über sich selbst schreibt er: "For me, the fun is in developing mathematics needed directly for science".
Einen ähnlichen Grund führt der Georg David Birkhoff-Preisträger GARRET BIRKHOFF (1978) für sein Arbeiten an: "Perhaps one of my original aims was to convince him (David Birkhoff) that "modern algebra", in spite of its abstractness, was relevant to the real world".
In dieser Aussage ist eine weitere wesentliche Einschätzung der Beziehung von Reiner Mathematik zu den Anwendungen angesprochen. Trotz der Forderung nach einer stärkeren Beachtung der Anwendungen soll die Mathematik nicht weniger abstrakt werden. Abstraktheit und Anwendbarkeit stehen einander nicht entgegen, vielmehr kann im Kontext mit Anwendungen genauso "exzellente" Mathematik betrieben werden. (vgl. New Mathematical Intelligencer, Nr. 3, 1978. Editorial).
KAC (1978) sieht die Mathematik - ebenso wie HERMANN - in den vergangenen Jahrzehnten von den Realwissenschaften abgekapselt. Jedoch sei in den Beziehungen der Mathematik zur Physik eine

Trendwende zu beobachten. KAC warnt jedoch gleichzeitig vor der Gefahr, daß aus dieser neuen Zusammenarbeit "dehydrierte Elefanten" entstehen können. Er versteht darunter elegante Axiomatisierungen naturwissenschaftlicher Bereiche, deren Bedeutung und Verwendbarkeit in den Naturwissenschaften zweifelhaft ist. Solche Gebilde entstehen leicht, wenn der Mathematiker über nicht genügend profunde Kenntnisse in dem entsprechenden naturwissenschaftlichen Gebiet verfügt. Die Axiomatisierung der Thermodynamik durch CARATHEODORY wird von KAC in die Nähe "dehydrierter Elefanten" gerückt.
TRUESDELL (1978),der ebenso wie KAC und HERMANN den Birkhoff-Preis zugesprochen bekam, scheint die Gefahr, die in der mathematischen Axiomatisierung naturwissenschaftlicher Bereiche liegen nicht sehr hoch einzuschätzen, denn er folgt in seinen Arbeiten folgender Richtschnur, die er auf HILBERT zurückführt: "Basic laws are formulated in terms of integrals, and the science is treated as a branch of pure mathematics, by systematic, rigorous development motivated by its logical and conceptual structure, decending from the general to the particular."

Neben diesen vorwiegend innerhalb der Wissenschaften ablaufenden Betrachtungen wendet HILTON (1978) sein Interesse der sozialen Bedeutung der Mathematik zu. Zwei Fragen sollten von dem in Forschung und Lehre stehenden Mathematiker überdacht werden:
1. In welcher Weise ist Mathematik bedeutsam für die Gesellschaft, in der Technologie und für dasVerstehen der Welt?
2. Wie soll man Studenten ausbilden um ihnen, der Gesellschaft und der Mathematik zu dienen?
Die Fragen sind bewußt unter dem Eindruck der aktuellen gesellschafts- und wirtschaftspolitischen Situation gestellt, die sich u.a. dadurch auszeichnet, daß junge überspezialisierte Reine Mathematiker Schwierigkeiten haben,einen Arbeitsplatz zu bekommen.

Mit diesen Fragen von HILTON möchte ich die Betrachtungen über Grundauffassungen der Mathematik von einem überwiegend historisch-genetischen Standpunkt aus schließen.
Die Fragen von HILTON deuten eine Richtung an, in der im folgenden Abschnitt die Grundauffassungen nochmals zum Gegenstand pädagogisch-normativer Überlegungen werden.

2. Entscheidung für einen ausgewogenen Mathematikunterricht

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir verschiedene Grundauffassungen ("Philosophien") von der Mathematik beschrieben und dabei Wertungen ausgeklammert. Im vorliegenden Abschnitt, wo wir die Frage stellen, welche Grundauffassung der Mathematik dem Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen zugrundegelegt werden soll, können wir Wertungen nicht mehr vermeiden, sondern wir müssen sie zum eigentlichen Thema erheben.
Es ist natürlich klar, daß es für die verschiedenen Grundauffassungen von Mathematik keine absoluten Wertmaßstäbe gibt. Vielmehr gibt es zu jeder Grundauffassung eine Position, von der aus sie sich vertreten läßt.
Wir wollen dies in Abschnitt 2.1. deutlich machen.

Von der Mathematikdidaktik, insbesondere von allgemeinen Erziehungs- und Lernzielen des Mathematikunterrichts aus erweisen sich die Grundauffassungen jedoch keineswegs als gleichberechtigt. Sie sollen daher in Abschnitt 2.2. einer pädagogisch-didaktischen Kritik unterzogen werden. Dabei werden sich die extremen Standpunkte als nicht haltbar erweisen.

In Abschnitt 2.3. sollen pädagogisch-didaktische Gründe für die ausgewogene Grundauffassung ins Feld geführt werden, die uns als Entscheidungsgrundlage für diese Grundauffassung und damit für einen ausgewogenen Mathematikunterricht dienen.
Am Schluß soll noch untersucht werden, warum sich der ausgewogene Standpunkt bisher nicht durchgesetzt hat.

2.1. Vertretbarkeit der extremen Grundauffassungen

In diesem und in dem folgenden Abschnitt 2.2. werden die extremen Grundauffassungen von verschiedenen Positionen aus bewertet.
Zunächst steht eine Betrachtung im Vordergrund, die nicht an die Bildungskonzeption einer allgemeinbildenden Schule gekoppelt ist, sondern vom

- persönlichen Bereich des Wissenschaftlers und Technikers und vom
- Gesamtfeld der Wissenschaften und Technik

ausgeht. Dabei ist eine liberale Haltung angebracht. Selbstverständlich muß dem einzelnen Mathematiker und der Gruppe der Mathematiker zugestanden werden, zu entscheiden, wie sie die Mathematik betreiben wollen. Entsprechendes gilt für Realwissenschaftler oder Techniker insbesondere für ihre Einstellung zur Verwendung der Mathematik.
Dem einzelnen Mathematiker kann die Ästhetik der Mathematik von großer Bedeutung sein. Ihm wird die Mathematik zum Kunstwerk. Die Freude, der Genuß und die Befriedigung, die jemand beim Schaffen und Betrachten eines Kunstwerkes empfindet, können für ihn Grund genug sein, diese Tätigkeit auszuüben. Mit ähnlichen Argumenten, mit denen Bildende Kunst oder Musik anerkannt wird, wird man eine aus ästethischen Gründen betriebene Mathematik anerkennen können.
Auf der anderen Seite wird man einem Realwissenschaftler oder Techniker zugestehen müssen, daß er Mathematik nur benutzt und sich für den Ausbau des mathematischen Gebäudes nicht interessiert. Für viele Benutzer der Mathematik ist es ökonomisch, nur Abnehmer für mathematische Formeln und Kalküle zu sein. Denn wollte sich ein Techniker in besonderem Maße mathematisches Hintergrundwissen aneignen, könnte das an der Zeit abgehen, die er zum Aneignen technischer Kennt-

nisse benötigt. Mathematische Formeln haben sich als schlagkräftiges Mittel erwiesen; das genügt! Außerdem hat nicht jedermann ein Talent für innermathematisches Arbeiten.

Es findet also eine Arbeitsteilung statt. Der Mathematiker leistet aus der Sicht des reinen Anwenders Zubringerdienste, während dieser für die "Verwertung" der Mathematik sorgt.

Über einen längeren Zeitraum kann die Arbeitsteilung nur aufrecht erhalten und besonders fruchtbar genutzt werden, wenn der jeweils andere Standpunkt nicht nur geduldet wird, sondern ein Verständis für den anderen vorhanden ist.
Zur Verbesserung des gegenseitigen Verständnisses schlägt R. FISCHER (1977, S. 48-49) u.a. vor, mit dem Techniker exemplarisch zu höheren Niveaus mathematischer Strenge vorzudringen und die Übergänge zu explizieren. Umgekehrt können mathematische Theorien benutzerfreundlicher dargestellt werden insbesondere, wenn es Theorieausschnitte sind, die auf bestimmte Gegenstandsbereiche hin konzipiert sind.

Vom Individuum aus betrachtet kann die Entwicklung von Mathematischen Theorien einerseits und die Anwendung andererseits getrennt werden. (Ganz abgesehen davon gibt es natürlich Personen, die - wie in 1.3. gezeigt wurde - , gleichermaßen an Anwendungen und Theoriebildung arbeiten). Jedoch zeigt die Entwicklung der Wissenschaften und Technik,daß eine Isolation von Reiner Mathematik und Anwendungen entsprechend den extremen Grundauffassungen nicht aufrechterhalten werden kann. Querverbindungen aller Art werden sichbar. Sie bilden ein Geflecht,in dem die Übergänge von der Reinen Mathematik zur Angewandten Mathematik fließend sind und wo nicht mehr deutlich erkennbar ist,was zur Reinen und was zur Angewandten Mathematik zählt.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß es günstig ist, wenn es neben denjenigen,die im ausgewogenen Sinne arbeiten, auch Spezialisten gibt. Für die Weiterentwicklung mathematischer Diziplinen ist es von Vorteil, wenn es Spezialisten gibt, die aufgrund ihrer Begabung und Interessenlage ausschließlich innermathematisch arbeiten und sich nicht um Anwendungen kümmern. Die Entwicklung der Wissenschaften würde jedoch einseitig verlaufen, wenn nur die innermathematische Forschung betrieben würde. Somit ist es sinnvoll, wenn diejenigen ein Gegengewicht bilden, die sich vorwiegend mit Anwendungen beschäftigen oder Mathematik nur benutzen.
Gefährlich werden die extremen Grundauffassungen, wenn sie ideologisiert werden und jeweils der anderen Grundauffassung die Existenzberechtigung abgesprochen wird. Würden Mathematikabnehmer - vielleicht aus Mangel an Einsicht in die Zusammenhänge - die Beschäftigung mit Reiner Mathematik als unnütz abstempeln, so könnten folgende Generationen von Anwendern von der Quelle abgeschnürt werden, aus der sie schöpfen, wenn neue Situationen bearbeitet werden sollen, für die es keine routinemäßige Bearbeitung gibt.
Z.T. polemisierende Kritik am jeweils anderen Standpunkt hat es schon immer gegeben. Beispielsweise schätzte HARDY die Arbeit der Anwender als "eintönig" ein, bei der man der Phantasie nicht freien Lauf lassen kann. Zu einer anderen Einschätzung kommen beispielsweise HILTON und RENYI, wobei Atribute wie kreativ, ästhetisch, phantasievoll eine Rolle spielen, die sonst gerne im Zusammenhang mit der Reinen Mathematik verwendet werden: RENYI (1967) legt ARCHIMEDES in einem fiktiven Dialog folgenden Satz in dem Mund: "Wer Mathematik mit Erfolg anwenden will muß Phantasie haben und träumen können"und RENYI meint, "die angewandte Mathematik ist in der Tat eine sehr

schwierige Kunst, und ich verwende das Wort "Kunst" mit Absicht, weil es natürlich im Wesen der angewandten Mathematik begründet liegt, daß zahlreiche ihrer Verfahrensweisen unmöglich algorithmisch sind."

2.2. Kritik an den extremen Grundauffassungen aus mathematikdidaktischer Sicht

Von verschiedenen Positionen aus haben sich die extremen Grundauffassungen als vertretbar erwiesen. Es gibt nun eine Reihe von Unterrichtskonzeptionen, Lehrplänen und Schulsysteme, die sich an den extremen Grundauffassungen orientieren, wenn auch nicht immer explizit.

In Korrespondenz mit der Mathematik als autarker Wissenschaft stehen u.a. folgende Kurse oder "Bewegungen" in der Schule:

- Vor der Jahrhundertwende war der Schulunterricht in der elementaren Geometrie an den "Elementen" von EUKLID ausgerichtet. Teile der Elemente wurden direkt als Schullehrbuch verwendet.
- Weltweit gab es in den vergangenen 15 Jahren Tendenzen, den Unterricht zumindest an höheren Schulen an BOURBAKI mit der Betonung deduktiv, axiomatischen Arbeitens zu orientieren. Dahinter wird natürlich der autarke Standpunkt erkennbar. Beispielsweise hat er sich in den Nürnburger Lehrplänen von 1966 für den gymnasialen Unterricht (siehe Kap. I, 2.1) oder dem französischen Schulsystem niedergeschlagen (vgl. GRIFFITH/HOWSON 1974).
- Auch der von DIENES stark beeinflußte Grundschulunterricht bevorzugt innermathematisches Arbeiten und die Trennung von Anwendungen und der natürlichen Umwelt des Kindes.

In pädagogischen Forderungen, die teilweise für spezielle gesellschaftliche Gruppen formuliert wurden, tritt die Einschätzung der Mathematik als Hilfsmittel auf:

Für die Volksschulen war zeitweise das Konzept der volkstümlichen Bildung maßgebend, wo der Rechenunterricht die Schüler auf die Rechenfälle des täglichen Lebens vorbereiten sollte. Es ging dabei darum,daß verschiedene Aufgabenstellungen mit einem bestimmten Kalkül bearbeitet werden konnten, jedoch nicht so sehr um die Aufdeckung gemeinsamer mathematischer Sachverhalte, die hinter die Aufgaben gestellt werden konnten.
DAMEROW et al. (1974), BÖLTS (1976) und LÖRCHER (1978) stellten ähnliche Forderungen auf, wie die volkstümliche Bildung, jedoch mit einem stark emanzipatorischen Anspruch. Sie formulierten das Postulat von "einer Erziehung zur Autonomie und Kompetenz in bestimmten realen Problemsituationen" (DAMEROW). Diese Forderung soll für alle Schulformen gelten.
LÖRCHER (1978, S. 177) spezialisiert sich auf die Haupt- und Realschule und stellt folgenden "zielorientierten Ansatz" in den Mittelpunkt möglicher Lehrplanreformen: "Über welche Minimalkenntnisse sollte jeder Schüler nach Abschluß seiner Schulzeit verfügen?" Bei der Entscheidung über die Auswahl einzelner Stoffe steht die spätere Verwendbarkeit im Berufsleben im Vordergrund.
In England sind vergleichbare Forderungen und Ziele in verschiedenen Epochen zu erkennen. Beispielsweise wurden um die Jahrhundertwende auf den Schulen, die überwiegend von Kindern der Arbeiter oder Kaufleute besucht wurden, ganz gezielt Fälle aus dem späteren Berufsleben bearbeitet (GRIFFITH/HOWSON, 1974). HANCOX fordert für die modernen Curricula (1974) "a practical mathematics for all". Was sich bei HANCOX angedeutet hat sich in der jüngsten Vergangenheit zu einer breiten Bewegung ausgebaut, die unter dem Schlagwort "Back to the Basics" steht. Im Jahrgang 1978 der Zeitschrift "The mathematics teacher" sind mehrere Beiträge dazu erschienen: MALE (1978) will diejenigen Fertigkeiten zur Grundlage des Unterrichts machen,

die ein Bürger benötigt um sich in der Umwelt zurechtzufinden. Dazu gehören vor allem: "... figuring income taxes, reconciling a checkbook, budgeting income, and figuring unit price". Die benötigten mathematischen Fertigkeiten beziehen sich auf die Grundrechenarten mit ganzen Zahlen, Dezimalzahlen und Brüchen. Der zu verfolgende Unterrichtsstil wird von OFFNER (1978) - einem Gegner der „back to the basic' Bewegung-folgendermaßen beschrieben: "They want more emphasis on drill and rote learning".

In den vergangenen 10 Jahren ist aus der Sicht eines Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen an den extremen Grundauffassungen und dem damit verbundenen Unterricht verstärkt Kritik geübt worden. Als Grundlage für eine solche Kritik dienen allgemeine Erziehungsziele für den Mathematikunterricht. Systeme solcher Ziele haben WINTER (1976) in Form von Allgemeinen Lernzielen, BIGALKE (1976) und WITTMANN (1976[4]) in Form einer "Erziehungsphilosophie der Mathematikdidaktik" zusammengestellt.[1)]
In sehr allgemeinen Worten ausgedrückt ist diesen - und anderen - Systemen gemeinsam, daß wesentliche Aufgaben des Mathematikunterrichts darin gesehen werden

- dem einzelnen Schüler gerecht zu werden,
- auf bestimmte Forderungen der Gesellschaft einzugehen,
- die Vielfalt der Arbeitsweisen in und mit Mathematik zu erfassen und so dem Kulturgut Mathematik selber gerecht zu werden.

[1)] Zum Thema "Erziehungsziele" hat WITTMANN (1978[5]) einen Übersichtsbeitrag geschrieben.

In den vergangenen 10 Jahren hat sich eine wachsende Strömung insbesondere gegen die autarke Grundauffassung innerhalb der Mathematikdidaktik herausgebildet. Als äußere (und erste) Zeichen kann man das Erscheinen einiger Zeitschriften, Schulprojekte und Tagungsthemen nehmen, wie:

- "Goals for the Correlation of Elementary Science and Mathematics" (1969)
- Schulprojekt "Science uses Mathematics"
- Utrechter Tagung mit dem Titel "How to teach Mathematics so as to be useful" (1968)
- Echternacher IMUK Tagung unter dem Titel: Neue Aspekte der mathematischen Anwendungen im Unterricht (1973)
- "International Journal of Mathematical Education in Science and Technologie" (ab 1970)

Die Kritik an einem Mathematikunterricht, der an der Reinen Mathematik orientiert ist, konzentriert sich vor allem auf folgende Punkte:

1. Der Schüler erfährt ein verzerrtes Bild von der Mathematik und das in zweierlei Hinsicht.

- Die Beziehungen zwischen Mathematik und Naturwissenschaften, Ökonomie, Technik usw. werden nicht sichtbar. Der Mathematikunterricht steht dadurch im Kanon der Schulfächer isoliert dar. Der Schüler bekommt leicht den Eindruck, Mathematik werde nur um ihrer selbstwillen betrieben.
- Typisch für einen Unterricht, der sich an der Reinen Mathematik orientiert, ist ein Unterrichtsstil, der die Mathematik als Fertigprodukt darstellt, bei dem die vorantreibenden Fragen nicht mehr präsent sind. Dadurch wird die Genese der Mathematik mißachtet und der Mathematikunterricht von der Rückendeckung gelöst, den ihm die über 2000-jährige Geschichte der Mathematik geben könnte. Dadurch wird dem Fach an Bedeutung und Selbstverständnis genommen.

2. Der Unterricht ist nicht kindgemäß

Der an der Reinen Mathematik orientierte Unterricht nutzt die Möglichkeit nicht aus, an Erfahrungen der Schüler anzuknüpfen, die in anderen Fächern und außerhalb der Schule gesammelt werden und wieder zur Erfahrungswelt zurückzukehren. Vielfach setzt der Unterricht bereits auf axiomatisch- deduktiver Ebene ein. Selbst, wo dies nicht der Fall ist, wird die reale Welt durch eine künstliche, eigens für den Schulunterricht zurechtgemachte Welt ersetzt (vgl. die Konzeption von DIENES). OGILVY (1976), der besonders auf die axiomatisch-deduktive Behandlung der euklidischen Geometrie in der Mittelstufe eingeht, kritisiert diesen Unterricht: "Er war zu formal, zu kalt und dürftig und daher ohne Leben und auch nicht belebend."
PAPERT (1971) stellt fest, daß ein solcher Unterrricht den Schülern nicht genügend Möglichkeiten zur Eigeninitiative und zum Gespräch über Mathematik in einer kindgemäßen Sprache bietet. KLINE (1973) kritisiert die Überfrachtung des Unterrichts mit Symbolen und Sprechweisen, die den Schülern den Weg zur Mathematik versperren.

3. Beziehungen zur Gesellschaft werden vernachlässigt

Seit Beginn dieses Jahrzehnts wird vor allem im englischsprachigen Raum die Meinung vertreten, daß der Unterricht, der sich an der autarken Grundauffassung von Mathematik orientiert, die Beziehungen zur Gesellschaft vernachlässigt. In diesen Beziehungen wird teilweise sogar die Hauptaufgabe des Mathematikunterrichts gesehen.
ORMELL (1972 a,b) kritisiert einen Mathematikunterricht, bei dem "die Mathematik in sich gekehrt bleibt und der Blick für die Probleme der Wirklichkeit nicht frei wird". Ein Auftrag des Mathematikunterrichts liegt darin, den Schüler zu befähigen, mögliche Wirkungen zu untersuchen, die von sozialen, technischen Neuerungen hervorgerufen werden können.

In einem Rückblick über die "New mathematics movement" stellt KAPUR (1976) fest, daß zuviele Kurse an BOURBAKI ausgerichtet waren. Man kann den Eindruck bekommen, "daß das Ziel des Mathematikunterrichts die Ausbildung zukünftiger Mathematiker sei". In einem ausgewogenen Ansatz zur Curriculumkonstruktion fordert KAPUR u.a. "Commercial mathematics and arithmetic concerned with problemes of everyday life should get greater importance".

GRIFFITH/HOWSON (1974, S.287) sehen in Kursen, die an der Reinen Mathematik ausgerichtet sind, ein zu geringes Wirkungsspektrum vertreten. Sie fordern die Beachtung der Anwendungen, weil dadurch die Beziehungen zur Gesellschaft hergestellt werden. "Perhaps the principal motive for teaching applications is that, by so doing, we prepare pupils to take their place in society; for even those who will not use mathematics in their later jobs will still need as citizens to reckon, to estimate, to make decisions, to weigh probabilities, and so on."
Ähnliche Äußerungen finden sich bei RICHARDSON (1973), KLINE (1973), NISS (1977), HOWSON (1977), SIDA (1978) usw.

Die Vernachlässigung der Beziehungen zur Gesellschaft hat auch Rückwirkungen auf die Motivationslage der Schüler: "Wir haben seit HARDY einen langen Weg zurückgelegt... . Dies wird von der Erkenntnis angezeigt, daß für viele Schüler, vermutlich den meisten, die Schönheit abstrakter Strukturen und die Schärfe der Logik weniger Anziehungskraft haben als die Möglichkeit, Mathematik auf wirkliche Situationen anzuwenden"(BAUSOR, 1974).

Auch aus dem Bereich der back-to-basic-Bewegung kommt Kritik (z.B. SHARPE, 1978): "The taxpaying public would like students to identify and solve day-to-day problemes, make effective consumer decisions, qualify for job opportunities, think clearly, and so forth. Without these skills, the quality of one's life is systematically diminished."

4. Die selbstgesteckten Ziele werden nicht erreicht.

Ein Unterricht, der am autarken Bild der Mathematik orientiert ist und die Darstellung der Mathematik nach BOURBAKI zum Vorbild nimmt oder dem Leitfaden EUKLIDs folgte, ist bisher gescheitert. Es kam schließlich auch hier ein Zerrbild heraus. KAPUR (1972) spricht von "Baby-Bourbaki"; einen für Kinder zurechtgestutzten Bourbaki, den STOWASSER (1977) schließlich treffend als "axiomatisches Ragout" charakterisiert.
Selbst innermathematisches Arbeiten wird nicht erlernt: "Reine Mathematik lernen heißt, auf der Schule oft nur, die Grammatik einer Sprache lernen. Dann kann man sie nicht anwenden; auch nicht innermathematisch (GRIFFITH 1975)."

Ein Unterricht, hinter dem die Auffassung von Mathematik als Hilfsmittel steht, fordert eine teilweise ähnliche Kritik heraus:

1. Der Schüler erfährt ein verzerrtes Bild von der Mathematik und Realität.

Auch die Auffassung von Mathematik als Hilfsmittel, die A.Z. KRYGOWSKA (1968, S.9) als einen "engen Nützlichkeitsstandpunkt" bezeichnet, "vermittelt dem Schüler ein verfälschtes und verstümmeltes Bild der Mathematik".

Das innermathematische Arbeiten und die Genese von Mathematik werden vernachlässigt. In einem Unterricht, in dem versucht wird, an jeder Stelle den direkten Nutzen der Mathematik zu zeigen, führt leicht zu "künstlichen Situationen, in denen die Schüler sich mit pseudopraktischen Problemen beschäftigen, die nichts mit den wirklichen Anwendungen der Mathematik zu tun haben". Dem Schüler wird so ein bagetellisiertes Bild der Realität vermittelt, Schwierigkeiten bei der Anwendung von Mathematik werden vertuscht.

2. Erstarrung der Unterrichtsmethoden

Um möglichst schnell zum Anwenden der Mathematik zu gelangen, bewegt sich der Unterricht in folgendem Zweitakt. Ein bestimmter Kalkül wird oftmals nur durch empirisches Arbeiten eingeführt oder "bestimmte Kenntnisse, Operationen und Methoden werden vom Lehrer vorgetragen" (LENNÉ, 1969, S.51) und anschließend durch Einüben von reinen Zahlenbeispielen zum Funktionieren gebracht. Anschließend erfolgt die Anwendung in Sachaufgaben, wobei diese so ausgewählt sind, daß zu ihrer Bearbeitung gerade der vorher trainierte Kalkül paßt. Dies führt zu einem weiteren Defizit:

3. Das selbstgesteckte Ziel wird nicht erreicht.

Eigentliches Ziel eines vom Hilfsmittelstandpunkt beeinflußten Unterrichts ist es, den Schüler zur Anwendbarkeit seines mathematischen Wissens in Beruf und täglichem Leben zu erziehen. Das erfordert jedoch einen flexiblen Umgang mit dem Wissen und die Fähigkeit, für nicht vorklassifizierte Situationen einen passenden Kalkül zu finden. Ganz abgesehen davon, sind die Schüler nicht darauf vorbereitet eigentätig Mathematik zu schaffen, falls bekannte Kalküle versagen.

4. Die Ökonomie der Mathematisierung wird nicht ausgeschöpft

Mit der Einnahme des Hilfsmittelstandpunktes geht im Unterricht häufig eine Distanzierung von mathematischen Begriffsbildungen einher sowie der Verzicht auf die Analyse verschiedener Sachsituationen auf ihren gemeinsamen mathematischen Hintergrund hin. Mit diesem Verzicht kann der Ökonomieeffekt, den die Mathematisierung realer Problemsituationen mit sich bringen kann, nicht voll ausgeschöpft werden. Begriffsbildungen, die nur mit einer speziell vorliegenden realen Situation verhaftet bleiben, verschließen den Blick für die breite Anwendbarkeit eines Kalküls.

Dieses Phänomen tritt beispielsweise deutlich in der traditionellen Volksschuldidaktik und heute im Berufsschulwesen hervor, wenn es um die Behandlung der Zinsrechnung, Mischungsaufgaben, Ware-Preis-Relation usw. geht. Der Begriff der Proportinalität wird dabei als einheitliches Werkzeug nicht thematisiert, sondern durch spezielle Anschriebe der Lösungssätze für die einzelnen Aufgabentypen noch zusätzlich verschleiert (vgl. BREIDENBACH 1956). Selbst für den traditionellen Mathematikunterricht der gymnasialen Mittelstufe stellt LENNÉ (1969, S.34) diese Vorgehensweise fest: "Eingekleidete Aufgaben werden nicht auf allgemeine Lösungen gleichartiger Fälle, sondern in der Regel auf die individuelle Lösung hin behandelt." LENNE spricht in diesem Falle von "fachstruktureller Abstinenz" im Unterricht.

5. Keine allseitige Förderung der Schüler

Der am Hilfsmittelstandpunkt ausgerichtete Unterricht neigt zu einer einseitigen Förderung der Anlagen eines Kindes und läßt andere Anlagen unberücksichtigt. Von den mathematiktypischen Tätigkeiten werden das Beweisen, Argumentieren, logische Schließen, die Erziehung zum exakten sprachlichen Ausdruck usw. zu wenig gefördert. Auch Kinder, die ein Vergnügen an der Ästhetik der Mathematik empfinden, kommen zu kurz.

2.3 Pädagogisch-didaktische Gründe für einen ausgewogenen Mathematikunterricht

In zunehmendem Maße wird seit etwa 10 Jahren innerhalb der Mathematikdidaktik dem Problem der Rechtfertigung des Mathematikunterrichts und damit verbunden der Formulierung von Aufgaben, Erziehungszielen oder allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts Aufmerksamkeit geschenkt. Aus dem Raum der Bundesrepublik sind u.a. die Beiträge von LENNÉ (1969), WINTER (1972c, 1975), KIRSCH (1974), BIGALKE (1976), und die zusammenfassende Betrachtung von WITTMANN (1978[5]) zu nennen. Die dort entwickelten Systeme von allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts eignen sich als formales Bezugssystem zur Begründung eines ausgewogenen Mathematikunterrichts.

Im folgenden stütze ich mich zunächst auf die von WINTER und BIGALKE entwickelten Lernzielkataloge für den Mathematikunterricht. Für unser Vorhaben muß jedoch das Bezugssystem über die allgemeinen Lernziele hinaus erweitert werden, da Gründe für einen ausgewogenen Mathematikunterricht auf verschiedenen (Lernziel-) Ebenen liegen: Zwei weitere Ebenen werden in die Betrachtungen einbezogen. Einerseits Bildungsziele der Schule, wie sie beispielsweise von V. HENTIG oder BIGALKE zusammenge-

stellt sind und andererseits die Erläuterungen und Unterrichtsbeispiele zu den Lernzielkatalogen, die vor allem von WINTER angegeben werden.
Es soll gezeigt werden, daß die Lernzielkataloge nur dann in ihrer Breite ausgefüllt werden können, wenn im Mathematikunterricht im ausgewogenen Sinne gearbeitet wird, und daß diesen Katalogen eine Betrachtungsweise von Gesellschaft, Mathematik und Schüler zugrundegelegt ist, in der die Beziehungen zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik bedeutsam sind.
Im Anschluß daran werden die Überlegungen offener gehalten und über den Lernzielrahmen hinausgehend geführt.

Wenden wir uns zunächst den Betrachtungen von WINTER zu, denen folgender Ansatz zur Bestimmung von Lernzielen zugrundeliegt: "Welches sind die mathematischen Grundtätigkeiten, die sich aus der normalen alltäglichen allgemeinen Denkpraxis heraus fortstilisiert haben und demgemäß bei ihrer Entwicklung noch am stärksten allgemeine (vor allem) kognitive Anlagen und Fähigkeiten mit beeinflussen könnten?" Hinzukommt, daß WINTER die Korrespondenz der Lernziele zu verschiedenen Aspekten oder Sichtweisen der Wissenschaft Mathematik herstellt. Die von WINTER aufgestellten allgemeinen Lernziele lauten - wie schon in Kap. I aufgeführt - folgendermaßen:

(L1) Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, schöpferisch tätig zu sein
(L2) Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, rationale Argumentation zu üben
(L3) Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren
(L4) Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, formale Fertigkeiten zu erwerben.

Am deutlichsten werden im dritten Lernziel die Verbindungen zu den Anwendungen hergestellt. Es erfordert die Mathematisierung

realer Problemsituationen. Dazu sind Einzelaktivitäten notwendig, wie sie für den Modellbildungsprozess charakteristisch sind. "...sammeln und ordnen mathematisch relevanter Daten (zählen,messen, schätzen, tabellieren, auflisten, Tabellen herstellen,...); Beschreiben des Zusammenhangs zwischen den Daten; Auffinden mathematisch sinnvoller Fragestellungen; Formulieren der Fragestellung in der Mathematischen Sprache; Lösen der Fragestellung innerhalb mathematischer Begriffssysteme (Rechnen); Ausdeuten der Lösungen; ... ." (L3) kann nicht mit einem Unterrichtsstil erreicht werden, "wenn Adam-Riese-Didaktik praktiziert wird, d.h., wenn zu einer Auswahl sogenannter praktischer Fälle des Lebens zugehörige Rezepte verabreicht und eingetrichtert oder wenn nach der Behandlung eines "Satzes" Anwendungsaufgaben gerechnet werden." WINTER fordert einen Unterricht in dem offene Sachsituationen am Anfang stehen und bei dem der mathematische Stoff aus diesen Situationen heraus entwickelt wird.

Das dritte Lernziel hat WINTER (1975, S.122) in Korrespondenz zu einem "wesentlichen Aspekt der geistigen Existenz des Menschen" formuliert: "dem Bestreben, Wirklichkeit zu beherrschen d.h., Voraussagen zu treffen, ökonomisch zweckmäßige Entscheidungen zu treffen, Technik zu betreiben." Der Mathematik selber soll der Unterricht "als anwendbare Wissenschaft" gerecht werden (S.116).

Auf den ersten Blick stehen die anderen Lernziele nicht in unmittelbarer Beziehung zu den Anwendungen. Jedoch legt die Allgemeinheit der Lernziele ein breites Erprobungsfeld nahe, in dem Anwendungen und Reine Mathematik ihren Platz haben.

Das erste Lernziel begründet WINTER durch folgendes Charkteristikum der geistigen Existenz des Menschen: Der Mensch "... trägt Anlagen in sich, die Zwänge des Augenblicks zu überschreiten, indem er Bilder der Wirklichkeit entwirft, diese dabei übersteigt, und in Sprache, Kunst, Wissenschaft, Philosophie neue Wirklichkeiten erschafft."

Wesentlich ist, daß dies aus spielerischen Gesichtspunkten , aus dem Motiv des "Herstellen wollens" geschieht und nicht an der Elle direkter Nutzanwendung gemessen werden muß. In dem ersten Lernziel wird der Mathematik "als schöpferische Wissenschaft Rechnung getragen"(S.116).
Auf der Ebene der Konstruktion von Unterrichtsbeispielen erläutert WINTER das erste Lernziel an Beispielen aus der Reinen Mathematik und an einem Beispiel, wie aus einer realen Situation heraus der Mittelwertsatz der Differentialrechnung vom Schüler entdeckt wird.

Das zweite Lernziel (rationale Argumentation üben) wird von Winter einem "... erstrangigen Aspekt menschlicher Existenz im ganzen zugeordnet: Der Mensch besitzt das Bestreben, über die Wirklichkeit zu sprechen, Zusammenhänge zu erkennen, Erklärungen zu finden, andere davon zu überzeugen, kurz: Erfahrungen zur Wirklichkeit rational zu ordnen." Der Mathematik selber wird hier "als beweisende, deduzierende Wissenschaft" Rechnung getragen (S.106).

Mit dem vierten Lernziel (formale Fertigkeiten erwerben) werden u.a. Aktivitäten angesprochen, die in enger Beziehung zur Anwendung stehen . Z.B.: "... Artikulation zwischen Gegenstandsbereich und Sprachbereich; Übertragen von Sachverhalten des Gegenstandsbereiches in den Zeichenbereich (Codieren); Ausdeuten von sprachlichen Gebilden (Decodieren);... trainieren des Übersetzens von Sachverhalten und Prozessen in Sprache; Ermunterung zum Auffinden von Möglichkeiten zur Schematisierung (in Blockplänen, Übersichtsplänen, Flußdiagrammen usw.)."
Hinter diesem Lernziel steht die Sicht der Mathematik als formale Wissenschaft (S.116).

Betrachtet man die Aktivitäten, die in den Lernzielen 1,2 und 4 angesprochen werden, so werden viele davon bei der Verfolgung von Lernziel 3 integriert.

Während WINTER seine allgemeinen Lernziele des Mathematikunterrichts in Korrespondenz zu (vor allem) kognitiven Grundhaltungen des Menschen und Wesenszügen der Mathematik (vgl. die Tabelle in WINTER 1975, S. 116) formuliert, orientiert sich BIGALKE an den Erfordernissen der gegenwärtigen gesellschaftlichen Praxis und vor allem an der anzustrebenden "persönlichkeitsorientierten Gesellschaft".
BIGALKE stellt unter diesem Aspekt neun Erziehungsziele zusammen. In Verbindung mit dem 7. Erziehungsziel (Erziehung zu wissenschaftlicher Intelligenz) und dem 8. Erziehungsziel (Erziehung zu technologischer Intelligenz) weist BIGALKE (1976, S. 32) die besondere Bedeutung der Mathematik für den Schulunterricht in dreifacher Hinsicht nach:
"(1) Mathematik als Inbegriff eines besonderen Typs von Wissenschaft und als Prototyp für viele modernen Wissenschaften.
(2) Mathematik als Hilfswissenschaft für viele andere Wissenschaften und als Hilfe für den Alltag.
(3) Mathematik als Lieferant von transferierbaren Methoden, Denkweisen und Erkenntnissen für das tägliche Leben."
Darüber hinausgehend kommen der Mathematik persönlichkeitsbildende Momente im Sinne von Selbstverwirklichung zu:
"(4) Mathematik als ein Gegenstand ästhetischer Betätigung."
Diese vier Punkte zeigen sehr deutlich, daß die Mathematik in ihrer Aspektvielfalt einschließlich der Anwendungen in den Unterricht eingebracht werden muß.

Meines Erachtens führt ebenfalls von dem sechsten Bildungsziel ein unmittelbares Bedürfnis für Mathematikunterricht in der Schule. Das Ziel lautet: "Erziehung zum Verständnis für die Bedeutung der Aufrechterhaltung des Gleichgewichts zwischen ökologischen Systemen und Technologie und zum entsprechenden Verantwortungsbewußtsein."
Betrachtet man die Studien des Club of Rome, in denen Computersimulationen auf der Grundlage mathematischer Modelle von grundlegender Bedeutung sind, als paradigmatisch für diesen Bereich, so wird die Bedeutung der Mathematik auch

hier offensichtlich.
Die eben erwähnten vier Punkte stellen eine Legitimationsbasis dar, von der aus BIGALKE - in Korrespondenz zu den neun Erziehungszielen und teilweise innermathematischen Zwängen folgend - sieben allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts aufstellt:

1. Förderung des wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens
2. Förderung des logischen Denkens
3. Förderung der Bereitschaft und Fähigkeit zum Argumentieren, Kritisieren und Urteilen
4. Förderung geistiger Initiativen, Phantasie und Kreativität
5. Förderung des Anschauungsvermögens
6. Förderung der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit
7. Förderung der Fähigkeit, Mathematik anwenden zu können.

Jedes dieser Ziele wird durch Stichpunkte erläutert, aus denen die inner- als auch außermathematischen Bezüge der Ziele hervorgehen.

Nach der Betrachtung der beiden Lernzielkataloge von WINTER und BIGALKE sollen noch weitere Beiträge herangezogen werden, um eine breitere Basis zur Begründung eines Unterrichts im ausgewogenen Sinne bzw. einer angemessenen Berücksichtigung der Anwendungen zu schaffen:

- D´AMBROSIO (1977, S. 224) sieht die Hauptaufgabe des Mathematikunterrichts folgendermaßen: "... to develop the ability of individuals to identify mathematics in intellectual experience, and distinguish mathematical reasoning and method in all the situations where they are either present or can be potentially inserted." Begründet wird dies mit den sozialen und ökonomischen Änderungen die in der Welt ablaufen und neuen Werkzeugen, die für das Verstehen und die Kontrolle der Natur und Technologie notwendig sind.

- Besondere Bedeutung messen FISCHER/MALLE (1978) der

Förderung kognitiver Fähigkeiten bei, die im Sinne der BLOOMSCHEN Taxomie auf unterschiedlichen Ebenen liegen: "Es werden höhere Niveaus der Verarbeitung möglich. Das Finden mathematischer Strukturen in der Wirklichkeit bzw. das Hineinlegen solcher in die Wirklichkeit macht Aktivitäten wie Interpretationen, Extrapolation, Analyse und Synthese notwendig." (FISCHER/MALLE 1978). Dadurch wird Mathematikunterricht anspruchsvoller. Ebenso darf man sich Positives "von angewandter Mathematik für das Merken der Inhalte erwarten. Je mehr Beziehungen, Assoziationen aufgebaut werden, desto eher ist ein Verfügbarsein über längere Zeiträume möglich". Der Gedanke der Beziehungshaltigkeit ist ein immer wiederkehrendes Leitmotiv didaktischen Arbeitens: KLEIN fordert, daß der Unterricht mit allem verbunden sein soll, was den Schüler interessieren kann und FREUDENTHAL gründet viele seiner Gedanken auf der Vorstellung, daß Wissen in "Beziehungsnetzen" organisiert sein sollte.
Eine Betrachtung der Aktivitäten beim Mathematisieren von Problemsituationen zeigt, daß eine Vielfalt unterschiedlichster Fähigkeiten gefordert und gefördert werden.

- Eines der betonten Erziehungsziele des neuen Mathematikunterrichts ist, daß alle Kinder vom Mathematikunterricht profitieren sollen (vgl. WITTMANN 1974[1], S. 22). Dies legt einen Unterricht nahe, in dem ein breitgefächertes Angebot gemäß der Dispositionen der Schüler möglich ist, was am ehesten zu verwirklichen ist, wenn sich der Unterricht am ausgewogenen Bild der Mathematik orientiert. Der Mathematikunterricht darf nicht nur diejenigen ansprechen die mit innermathematischen Bezügen zufrieden sind, sondern auch denen eine Chance geben, die mathematische Begriffe mit Umweltbezügen verklammern müssen und aus der Anwendbarkeit der Mathematik ihre Motivation für die Auseinandersetzung mit der Mathematik beziehen.

- In verschiedenen Katalogen von Bildungszielen (z. B. von BIGALKE und v. HENTIG) wird die Erziehung zur Kommunikationsbereitschaft und Kommunikationsfähigkeit gefordert. Ein ausgewogener Unterricht erfordert dies in zweierlei Weise.
  a) Die Bearbeitung realer Problemsituationen erfordert Handlungen und Gespräche die aus dem Klassenzimmer in die Umwelt hinausführen.
  b) Die Bearbeitung von Projekten "unüberschaubarer Größenordnung" legt die Bearbeitung in der Gruppe nahe. Die Überschaubaren Probleme der Reinen Mathematik haben gerade dies im Unterricht verhindert (KLAUS, 1978)

- Das Ziel der Erziehung der Schüler für eine pluralistische Gesellschaft mit pluralistischen Wertvorstellungen (BIGALKE, 1976) verlangt eine liberale Einstellung zu verschiedenen Erscheinungsformen der Mathematik. Dies ist wohl leichter möglich, wenn der Schüler die Vielfalt der Arbeitsweisen in und mit der Mathematik kennengelernt hat.

- Im affektiven Bereich kann ein breites Feld angesprochen werden, da über die arrangierten Lernsituationen im Klassenzimmer hinaus vom Schüler erlebte Situationen und aktuelle Ereignisse zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden können.

- HOWSON (1977) fordert, daß die Mathematik in der Bevölkerung eine Vorstellung von der Rolle und dem Wesen der Mathematik hervorbringen soll. Das geht wohl nur, wenn man das Wachsen des Kulturgutes Mathematik in seiner 3000-jährigen Geschichte beachtet mit seinen vielfältigen Beziehungen zu außermathematischen Bereichen und in seiner Bedeutung für den einzelnen Menschen. Darin scheint mir ein allgemeinbildender Anspruch des Mathematikunterrichts zu liegen.

2.4 Warum hat sich der ausgewogene Standpunkt bisher nicht durchgesetzt?

Wenn man sich klar macht, wie leicht sich die extremen Standpunkte kritisieren lassen und wie offensichtlich positiv der ausgewogene Standpunkt zu bewerten ist, stellt sich die Frage, warum sich dieser Standpunkt im Schulbereich und an Hochschulen in Forschung und Lehre bisher nicht in der Breite durchgesetzt hat. Für die Schule ist diese Frage zumindest seit der Zeit dringend, von der an bewußt auf eine geschlossene Konzeption des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen hingearbeitet wurde. Es gibt hierfür eine Reihe von Gründen, deren Gewicht schwer abzuschätzen ist.

- In bezug zum Lehrbetrieb an den Hochschulen sieht HILTON (1974) einen Grund darin, daß es wesentlich schwieriger ist, einen Angewandten Mathematiker auszubilden, als einen Reinen Mathematiker. DINGES (1974) spricht gar davon, daß an traditionsbewußten Instituten dem Bestreben, die Mathematiklehrerausbildung in ständiger Reflexion auf die Anwendungssituation voranzutreiben, mit "Hohn" begegnet wird.

- Es ist schwieriger, einen ausgewogenen Standpunkt zu zeichnen, da er eine größere Einsicht in die Zusammenhänge, einen größeren Überblick erfordert. Noch schwieriger ist es, diesen Standpunkt auszufüllen. Das erfordert von einem Mathematiker, daß er rein innermathematisch arbeiten kann; aber er muß auch Erfahrungen auf außermathematischen Gebieten besitzen, damit er dort Mathematik anwenden kann. Es ist die Abkehr vom Nur-Spezialisten, was die Bereitschaft zum Eindenken in fremde Gebiete erfordert sowie die Bereitschaft zur Kooperation mit Realwissenschaftlern.

- Für einen jungen Mathematiker ist es sicher einfacher Karriere zu machen, wenn man sich in einer Richtung

spezialisiert, die von einem großen Teil der Ordinarien anerkannt wird: Das ist die ausschließende "Beschäftigung mit hochkarätiger Mathematik" (DINGES 1974), nämlich der Reinen Mathematik. Möglicherweise erlangen Mathematiker schneller ein hohes Sozialprestige, wenn sie sich auf einem mathematischen Gebiet hochspezialisieren. Da bleibt dann keine Zeit für Anwendungen. Für diese Entwicklung gibt es wohl eine innere Notwendigkeit: KLINE (S.1024,(1972)) spricht von der Explosion der Mathematik in vielen Teilgebieten, die sich autonom und mit eigener Terminologie entwickeln, so daß die Spezialisierung des einzelnen Mathematikers unausweichlich ist.

- Schon um die Jahrhundertwende kritisierte F. KLEIN die Studentenausbildung, wegen ihres "formalen Betriebes". Auch heute hat sich hieran kaum etwas geändert, trotz einzelner Gegenversuche von KLEIN, TOEPLITZ, COURANT oder POLYA. Mathematik wird als Fertigprodukt angeboten. Dies wirkt sich auf den zukünftigen Lehrer aus. Vielfach transformiert er nur den Stoff auf ein etwas tieferes Niveau und streckt ihn mit einer größeren Anzahl von Beispielen. Dort wo der Stoff an der Hochschule unter Beachtung der Anwendungen genetisch gelehrt wird und sogar eine genetische Unterrichtsplanung erfolgt, werden nur wenige Lehrerstudenten später auch ihren Unterricht selbst genetisch gestalten. Der spätere Lehrer schafft es meist nicht, den Bogen von einer Theorie zur Praxis eines genetischen Unterrichts zu spannen, wenn es versäumt wurde, dem Studenten die Möglichkeit zu geben, die eben (implizit oder explizit) erfahrene Theorie von einem genetischen Unterricht in entsprechenden Veranstaltungen selbst zu praktizieren. Auch hier gilt, was ja auch für mathematische Theorien gilt: Man muß möglichst eigentätig lernen oder erfahren haben, daß Theorien anwendbar sind. Das genetische Prinzip gilt auch, wenn der Student das genetische Prinzip erlernen und beherrschen soll.

Die Entwicklungstendenzen an den Universitäten haben vielfach den Schulunterricht insbesondere an Gymnasien beeinflußt und seit ca. 10 Jahren auch den Betrieb in Grund- und Hauptschulen. Die Gründe dafür, daß dieser Unterricht überwiegend formal, die Intuition vernachlässigend (DIEUDONNE 1974) und die Anwendungen mißachtend abläuft, sind ähnlich gelagert wie für den universitären Bereich. Es gibt objektive Schwierigkeiten administrativer Art sowie Gründe, die mehr im persönlichen Bereich des Lehrers (und Schulbuchautors) zu suchen sind.

- Viele Lehrer sind gar nicht dafür ausgebildet, die Anwendungen in den Unterricht mit einzubeziehen. Es fehlt ihnen selber an ausreichenden Kenntnissen in anderen Gebieten, sie fühlen sich unsicher, unwohl, wenn sie das wohlbekannte mathematische Terrain verlassen müssen. Manchen wird auch das "mathematische Gewissen" schlagen, wenn der Anspruch der Reinen Mathematik durch Anwendungen verwässert wird und die Maßstäbe der Strenge sinken.

- Die Lehrer sind als Fachlehrer ausgebildet und besondere Prüfungsregelungen gerade für Mathematiklehrer haben eine Hochspezialisierung gefördert (Diplommathematiker im Schuldienst; Staatsexamen in Mathematik und ein zweites Fach nur bis zur Zwischenprüfung).

- Die Einführung der "Neuen Mathematik" mit ihrem zum Teil speziellen Vokabular hat Kommunikationsbarrieren zwischen Mathematik und Naturwissenschaften aufgebaut.
  Die Kommunikation zwischen Lehrern kann aber auch aus Sozialprestigegründen erschwert werden u.a. aus der Furcht heraus, Wissenslücken vor einem Kollegen aufdecken zu müssen.

- Die Lehrpläne der verschiedenen Fächer sind - trotz gegenteiliger Beschwörungen in den Präambeln - überwiegend unkoordiniert verfaßt.

- Der starre Stundenplan erschwert die Kooperation zwischen den Fächern.

- Ein anwendungsorientierter Unterricht kostet in der Vorbereitung Mühen, u.a. "da wir nur einen kleinen Vorrat an guten Problemen für Anwendungen haben, die auch von Anfängern angegangen werden können". (GRIFFITH/HOWSON, 1974).

- Es erfordert schnelleres Reagieren, wenn aktuelle Probleme aus dem öffentlichen Leben auftauchen, die es wert sind, mathematisiert zu werden, die aber naturgemäß unmöglich in einem Lehrbuch stehen können. Weiterhin ist die Steuerung eines anwendungsbezogenen Unterrichs mit offenen Problemsituationen schwieriger, als wenn man dem Faden einer fertigen Mathematik folgt. Es erfordert einen äußerst wendigen Lehrer.

- Aus der Sicht des Grund- und Hauptschulunterrichts ist zu bedauern, daß pädagogische Ideen wie die des ganzheitlichen Unterrichts an Einfluß verloren haben.

Vergleichsweise einfach ist es dagegen, einen Unterricht abzuhalten, der sich an der autarken Grundauffassung von Mathematik orientiert. KAPUR (1970) nennt hierfür zwei Gründe:

- Der Mathematikunterricht kann sich ungestört vom "Rauschen" der Umwelt entwickeln.

- Mit BOURBAKI ist ein Vorbild gegeben, zu dem nur ein verkürzter "Baby-BOURBAKI" für die Schule entwickelt werden muß, bei dem der Ablauf der Stunden fest vorausplanbar ist. Hinzu kommt, daß für den Unterricht im "Baby-BOURBAKI"-Stil ein reiches Angebot an Schulbüchern vorliegt.

Die aufgeführten Schwierigkeiten, die einem Unterricht im ausgewogenen Sinne entgegenstehen, erfordern konstruktive Maßnahmen zu ihrer Behebung oder Milderung. In Kapitel III

werden wir das Problem unter dem Gesichtspunkt der Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung wieder aufgreifen.

3. Modellbilden

Das in den beiden ersten Abschnitten aus wissenschaftshistorischer und pädagogischer Sicht betrachtete ausgewogene Bild der Mathematik wird wesentlich von einem theoretischen Konstrukt geprägt, das gleichzeitig die Integration und die Trennbarkeit des reinen und angewandten Aspekts der Mathematik beinhaltet: dem Modellbegriff. Der Klärung dieses Begriffs - insbesondere unter methodologischem Gesichtspunkt - wollen wir uns nun zuwenden, wodurch gleichzeitig eine Grundlage für die konstruktiv-praktischen Kapitel III und IV geschaffen wird.

Bei der Modellbildung handelt es sich um einen Vorgang, bei dem für ein reales Problem ein mathematisches Bild ("Modell") entworfen wird, das mit Methoden der Mathematik bearbeitet wird. Die gewonnenen mathematischen Ergebnisse können schließlich durch Interpretation für das Ausgangsproblem Bedeutung erlangen.

Das mathematische Modell kann aber auch selber, losgelöst von dem realen Problem, zum Gegenstand weiterer Untersuchungen gemacht werden. So kommt auf natürliche Weise die Reine Mathematik zum Zuge, deren Ergebnisse zu einem späteren Zeitpunkt wiederum für reale Probleme genutzt werden können. (Vgl. nochmals die Darstellung zur Arbeit von FOURIER an der Wärmeleitungsgleichung in 1.3.)

Der Prozeß des Modellbildens eignet sich dazu, die Nahtstelle und das Wechselspiel zwischen Reiner Mathematik und Anwendungen aufzudecken und den Mechanismus der Genese von Mathematik zu konkretisieren.

Der Reine Mathematiker erforscht kurz gesagt (potentielle) Modelle, während der die Anwendungen beachtende Mathematiker die Übersetzungsvorgänge aus der Realität in die Mathematik und zurück mit bearbeitet.

3.1 Klärung des Modellbegriffs

Der Begriff "Modell" ist ein schillernder Begriff, der in verschiedenen Zusammenhängen verwendet wird; z.B. in den Naturwissenschaften (Atommodell, Modell einer Zelle usw.), in der Industrie und im Handwerk (Automodelle, Modell-Schreiner), in der Mode (ein Kleidungsstück als Modell), in der Kunst (Modellstehen), in der Architektur (Modell eines Gebäudes), in den Gesellschaftswissenschaften (Modellvorstellung über die Entwicklung einer Volkswirtschaft) usw.

Gelegentlich spricht man von verschiedenen Modellbegriffen; beispielsweise wird gern der Modellbegriff der Physik dem mathematischen gegenübergestellt. Die folgenden Betrachtungen werden jedoch zeigen, daß zumindest im mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht kein zwingender Grund besteht, von verschiedenen Modellbegriffen zu sprechen. Ausgehend von drei verschiedenartigen Beispielen, wollen wir den gemeinsamen Kern der verwendeten Modelle herausarbeiten.

Beispiel 1: Im Raumlehre- oder Geometrieunterricht werden geometrische Körper aus Holz, Papier, Plastik oder Stäben verwendet. Sie erfüllen bestimmte Aufgaben:

- Ein Tetraeder kann zur Veranschaulichung des Simplex im R^3 dienen;
- eine vierseitige Pyramide ist Modell (verkleinertes Abbild) einer ägyptischen Pyramide;
- ein Quader kann stellvertretend für alle quaderförmigen Objekte stehen. Aus ihm erarbeitet sich der Schüler beispielsweise Aussagen über die Anzahl der Kanten, Flächen und Ecken und überträgt sie anschließend auf alle quaderförmigen Objekte.

Beispiel 2: Einem zweiten Verwendungszusammenhang für den Begriff Modell begegnet man im strukturorientierten Mathematikunterricht. Hier werden abstrakten Strukturen "konkrete" Strukturen als Modell zugeordnet. Beispielsweise ist die additive Struktur ($\mathbb{R}$, +) der reellen Zahlen ein Modell für die abstrakte Gruppe.

Beispiel 3: Eine dritte Verwendung des Modellbegriffs tritt im Zusammenhang mit der Mathematisierung von Situationen aus Naturwissenschaften, Soziologie, Industrie, täglichem Leben usw. auf.

Dieser dritte Zusammenhang, der für die vorliegende Arbeit bedeutsam ist, verkörpert den Kern des Modellbegriffs am deutlichsten und soll deshalb ausführlich an einem Beispiel beschreiben werden. Das Beispiel ist aus dem Operationsresearch (O.R.) gewählt, da diese Disziplin außerhalb der Naturwissenschaften starke Impulse auf die Anwendungen der Mathematik ausgeübt hat.
Die folgende Situation vom Konservenfabrikanten hat ihre historische Bedeutung dadurch erhalten, da sie (u.a.) G. DANTZIGs Forschungen auf dem Gebiet der linearen Optimierung auslöste.

Das Problem des Konservenfabrikanten lautet: "Drei Konservenfabriken eines Fabrikanten liegen in Portland, Seattle und San Diego. Sie können pro Tag 250, 500 bzw. 750 Kisten mit Konserven herstellen. Dem Fabrikanten stehen fünf Lagerhäuser im Lande zur Verfügung, nämlich in New York, Chikago, Kansas City, Dallas und San Francisco. Jedes der Lagerhäuser kann täglich 300 Kisten verkaufen. Der Fabrikant möchte die Anzahl der Kisten, die von einer Fabrik zu einem Lagerhaus gesandt werden, so bestimmen, daß jedes Lagerhaus genau die Anzahl Kisten erhält, die es täglich verkaufen kann, und dabei die Gesamttransportkosten minimiert werden."
(G. DANTZIG, 1964)

An dieser Stelle soll nicht darauf eingegangen werden, inwieweit das Problem die tatsächliche Situation idealisiert und vormathematisiert, vielmehr wird ein mathematisches Modell angegeben, das die beschriebene Situation erfaßt und die Daten dieser Beschreibung verarbeitet. Dazu werden noch die Versandkosten je Kiste benötigt, die in einer Situationsskizze eingetragen und in einer Tabelle zusammengefaßt sind.

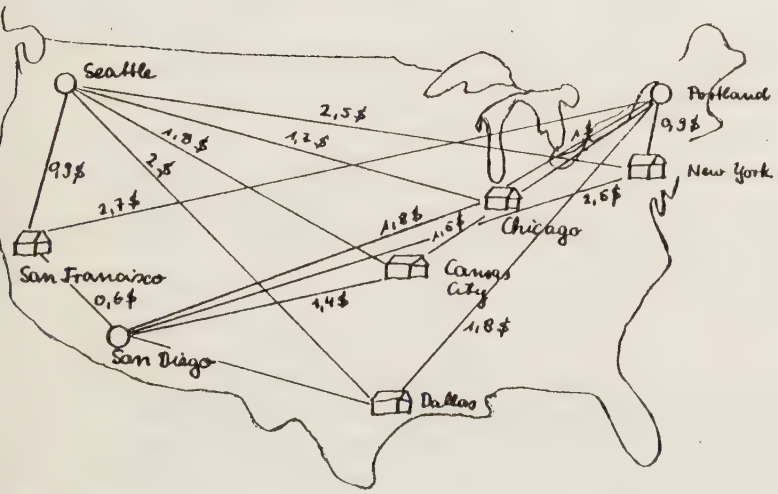


Abb. 1: Situationsskizze für das Verschickungsproblem

von/nach	CHIKAGO	KANSAS	DALLAS	FRISCO	NEW YORK
PORTLAND	1,0	1,5	1,8	2,7	0,9
SEATTLE	1,7	1,8	2,0	0,9	2,5
SAN DIEGO	1,8	1,4	1,6	0,6	2,5

Die Verschickungspreise werden mit p_{ij} (i = 1,2,3, j = 1,2,3,4,5) und die Mengen, die zwischen den einzelnen Orten verschickt werden, mit m_{ij} bezeichnet, dann sind die Gesamttransportkosten p:

(1) $$p = \sum_{i,j} p_{ij}\, m_{ij}. \qquad \text{(min!)}$$

Diese sind zu minimieren, wobei für die m_{ij} einige Bedingungen zu erfüllen sind:
In den Warenhäusern müssen je 300 Konserven ankommen, d.h.

(2) $$\sum_{i=1}^{3} m_{ij} = 300 \qquad (j=1,2,\ldots,5)$$

Aus den Fabriken kann nicht mehr verschickt werden, als produziert wird, d.h.

(3) $$\sum_{j=1}^{5} m_{ij} = g_i \qquad \text{mit } g_1=250,\ g_2=500,\ g_3=750.$$

Außerdem sollen keine "negativen" Mengen verschickt werden können, d.h.

(4) $$m_{ij} \geq 0.$$

(1) - (4) heißt man ein mathematisches Modell der oben geschilderten Situation bei der vorgegebenen Fragestellung. Gelöst wird das System (1) - (4) mit dem Simplexalgorithmus. Es liegt nun an dem Fabrikanten, die angebotene Lösung, die aus einem Verschickungsplan besteht, zu übernehmen, oder unter Berücksichtigung weiterer Gesichtspunkte zu modifizieren.

Gemeinsamkeiten der drei Beispiele: Trotz der verschiedenartigen Kontexte, in denen Modelle auftraten, liegt ihnen etwas gemeinsames zugrunde, nämlich der Zusammenhang, in den Modelle gestellt werden. KLAUS (1972) formuliert dies so: "Die Funktion des Modells ergibt sich im Rahmen eines aus Subjekt,

Original und Modell bestehenden Modellsystems in Abhängigkeit von der gegebenen Zielstellung des Subjekts."
Diese Charakterisierung stimmt mit der von L. APOSTEL (1961) überein. Dieser schreibt: "The subject S takes, in view of the purpose P, the entity M as a model for the prototyp T."
Diese Charakterisierung hat zur Folge, daß wir bestimmte Objekte oder mathematische Systeme nicht von vornherein als Modell betrachten, sondern erst wenn klar ist, wovon das Objekt Modell ist und wofür das Modell benutzt wird.
Die folgende Tabelle faßt die Modellvariablen S,P,M,T für die drei vorausgegangenen Fälle zusammen. Die Tabelle enthält eine Spalte, die den Wechsel zwischen Objektebene und Modellebene klassifiziert. G. FREY (1961) gibt drei Ebenen an: physische, ikonische, symbolische.

Tabelle für die drei Fälle

Fall	Subjekt	Objekt	Modell	Zweck	Ebenenwechsel Obj.⟶ Modell
1	Lehrer, Schüler	Definition des Simplex	Tetraeder aus Holz	Veranschaulichung	symbolisch ⟶ physisch
2	Lehrer, Schüler	Axiomensystem	(R, +)	Interpretation	symbolisch ⟶ symbol.
3	Manager	Transportsituationen	System linearer Gleichgn.	Entscheidungshilfen	phys. } ikon. } symbol. } ⟶ symbol.

Zwei explizite Definitionen für den mathematischen Modellbegriff

Bei der Durchsicht von Literatur über Anwendungen der Mathematik kommt man immer wieder an Stellen, an denen über den Begriff des mathematischen Modells in unterschiedlicher Ausführlichkeit gesprochen wird. Während beispielsweise DANTZIG (1966), STAHLKNECHT (1971), HENN/KÜNZI (1968) oder BOUDON (1973) nur implizit vorgehen, geben KLOTZ (1975), KLAUS (1968) als Kybernetiker und JAEGER/WENKE (1968) explizite Beschreibungen und

Analysen. Wir können zwei Formen der Definition unterscheiden und werden uns für die breite Auslegung entscheiden, um uns im Gebrauch des Begriffs „Modell" nicht zu sehr einschränken zu müssen.

R. KLOTZ (S.158) geht umgangssprachlich vor und versteht unter dem mathematischen Modell "eine angemessene Beschreibung der beobachtbaren Vorgänge". KLAUS schreibt ausführlicher, daß das Modell ein Objekt ist, "das auf der Grundlage einer Struktur-, Funktions- oder Verhaltensanalogie zu einem entsprechenden Original von einem Subjekt eingesetzt und genutzt wird, um eine bestimmte Aufgabe zu lösen ..." Wegen der geringen Anforderungen, die hier an ein Modell gestellt werden, fallen auch sogenannte "black-box"-Modelle unter den Modellbegriff. Insbesondere führt dann die Methode der Kurvenanpassung ("curve-fitting") auf mathematische Modelle. Diese Methode scheint dann besonders angezeigt, wenn man eine Situation als black-box auffaßt (oder gezwungen ist, sie als black-box aufzufassen, da z.B. die Situation zu komplex ist, als daß irgend welche Strukturen in der Situation erkennbar wären). Man verfolgt dann eines oder mehrere Merkmale der Situation und versucht die dabei gewonnene Meßreihe möglichst gut mit einer Funktion zu beschreiben. Beim curvefitting wird also besonders auf Verhaltensanalogie von beobachteten Merkmalen und Funktion abgehoben.
Diese Methode wurde, wie BOUDON (S.16) schreibt, besonders in der Demographie, Ökonomie, Soziologie und Medizin verwendet, immer aber war die Kurvenanpassung "ein Behelf, den es zu überwinden galt". Die Gründe dafür werden aus der folgenden Betrachtung deutlich.
JAEGER/WENKE schränken die Definition von KLAUS dadurch ein, daß Verhaltensanalogie als alleiniges Merkmal nicht zugelassen wird:
"Ein mathematisches Modell ist der Versuch einer möglichst relations- und operationstreuen Abbildung einer meist nur implizit gegebenen oder unscharf abgrenzbaren empirischen Struktur durch eine nach Möglichkeit einfache mathematische Struktur, der den Zweck verfolgt, im Hinblick auf bestimmte

Fragestellungen in einem beschränkten und nicht immer klar umrissenen Gültigkeitsbereich die Originalstruktur auf dem Umweg über die Bildstruktur erkennen, analysieren, verstehen, beschreiben, beeinflussen und prognostizieren zu können." Auch an dieser Definition werden die vier Modellvariablen erkennbar. Es werden aber besonders die Schwierigkeiten und die Ungewißheit betont, die beim Modellbildens auftauchen, so daß das Entwurfhafte, die eventuelle Verbesserungsfähigkeit eines Modells herauskommt sowie die Unterscheidung zwischen der zu beschreibenden Realität und dem Modell.

JAEGER/WENKE betonen die Abgrenzung ihres eingeschränkten Modellbegriffs z.B. gegenüber Modellen, die aus Kurvenanpassung entstehen:
"Es scheint aber nicht empfehlenswert, ein mathematisches System als Modell einer empirischen Struktur zu bezeichnen, solange die Zuordnung der Grundmenge, der Menge der Relationen und der Menge der Operationen der empirischen Struktur auf die mathematische Struktur vollständig unerkannt bleibt."

Wir wollen die engere und die weitere Modellauffassung an der Situation von Schwankungen in Feldmauspopulationen (vgl. dazu Kap. IV) erläutern und gleichzeitig deutlich machen, daß der Übergang von einem strukturbehafteten Modell zu einem curve-fitting Modell fließend ist.
Die Mäusesituation wird dadurch modellhaft erfaßt, daß die Population in einem Populationsvektor und die Überlebensraten sowie Vermehrungsraten in einer Matrix zusammengefaßt wurden. Die Matrix auf den Vektor angewendet ergibt die Population nach einer Generation.

In diesem mathematischen Modell gehen als Trägermenge der Situationsstruktur die Mäusegenerationen durch die Komponenten des Vektors ein, die unterschiedlichen Altersstufen

(hinter denen eine Relation steht) sind in der Vektorschreibweise berücksichtigt, und schließlich ist der funktionale Zusammenhang zwischen einer Generation und der folgenden durch das iterative Arbeiten mit der Matrix ersichtlich.
Wir können so den Populationsverlauf beschreiben und insgesamt liegt ein Modell vor, das der engen Auslegung des Modellbegriffs genügt.

Eine Beschreibung für den Populationsverlauf wäre uns auch gelungen, wenn wir über 4 Jahre hinweg die Population ausgezählt hätten und ein Interpolationspolynom für die Meßdaten aufgestellt hätten. Hierbei ginge aber keinerlei Struktur in die Modellbildung ein, so daß ein Modell im weiteren Sinne vorläge.
Der Vorteil des strukturbehafteten Modells besteht darin, daß es bei den Fragen zur Schädlingsbekämpfung besser zur Prognose eingesetzt werden kann: Schädlingsbekämpfung bedeutet Verkleinerung der Überlebensraten. Da diese in das Modell explizit eingehen, wird das Modell für den Benutzer manipulierbar. Man kann direkt an ihm experimentieren. Bei Verwendung eines Polynoms hätte man wieder messen müssen, was voraussetzt, daß die Mäusebekämpfung hätte vorher durchgeführt werden müssen.

Daß die Übergänge zwischen dem weiten und dem engen Modellbegriff fließend sind, kann an dem Mäusebeispiel ebenfalls gezeigt werden. Über die Bestimmung der Eigenvektoren und Eigenwerte der Matrix wird nämlich eine Approximation des iterierten Populationsverlaufs mittels einer Exponentialfunktion abgeleitet. Diese ist ein mathematisches Modell des ersten Modells und bei anderen Fragestellungen geschickter einzusetzen. Der Exponentialfunktion sind viele Details der Ausgangssituation nicht mehr anzusehen, andererseits wurde sie aus einem Modell gewonnen, das die Struktur der Situation weitgehend respektiert. Insofern ist es nicht eindeutig, ob die Exponentialfunktion hier ein Modell im engen oder weiteren Sinne ist.

3.2 Prozeß des Modellbildens

In diesem Abschnitt soll der Vorgang des Anwendens von Mathematik auf reale Situationen als mehrschrittiger Vorgang beschrieben werden.

Wir stützen uns auf eine Auswahl von Beiträgen, in denen der Prozeß von verschiedenen Wissenschaften aus beleuchtet wird. Eine grunlegende Analyse des Physikers HERTZ, in der der Kern des Modellbildens klar herausgestellt ist, bildet den Einstieg. Für eine verfeinerte Darstellung greifen wir auf Beiträge aus dem Operationsresearch (ab 1945) zurück, u.a. DANTZIG (1966), CHURCHMAN u.a. (1960), RIVETT (1968) und ein Autorenkollektiv (1971). Schließlich wird der Prozeß des Modellbildens mit der zunehmenden Bedeutung der Anwendung im Mathematikunterricht für die Didaktik zum Arbeitsgebiet, vielleicht angeregt durch die Forderung von KRYGOWSKA (1968), die grundlegenden Tätigkeiten beim Anwenden von Mathematik herauszuarbeiten. Besonders zu erwähnen sind die Arbeiten von FORD/HALL (1970), HEATON (1970), BROWN (1972), HILTON (1974), D.W. MÜLLER (1974) und H.G. STEINER (1976), der einen zusammenfassenden Beitrag geleistet hat.

Im Unterschied zu dem von STEINER vorgestellten Schema, das sich auch zur Beschreibung von Theorieentwicklung eignet (vgl. die Darstellung der Entwicklung der Stochastik in FISCHER/MALLE (1978)), ist das folgende Schema stärker auf die Bearbeitung einzelner realer Problemsituationen spezialisiert.

Die Schritte werden an verschiedenen Beispielen erläutert.

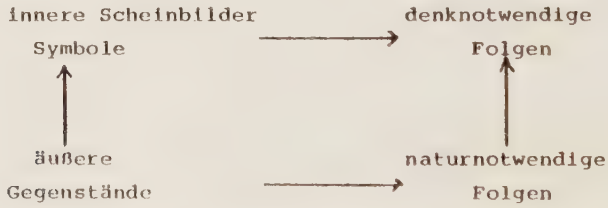
Eine erste Strukturierung des Vorgangs ist dadurch gegeben, daß Modellbilden als Pendelbewegung zwischen zwei Bereichen oder Ebenen beschreibbar ist:

1. der realen Welt der Physik, Biologie, Sozialwissenschaften usw.
2. der Welt der Mathematik.

Die Durchlaufungsrichtung der Bereiche legt SIDA so fest:
"Der Vorgang des Verstehens der Realität durch die Mathematik ist als Weg in und aus der zweiten Welt heraus zu sehen ..."

Dieser Weg wird in der HERTZ schen Beschreibung weiter untergliedert:
"Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände, und zwar machen wir sie von solcher Art, daß die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände."

Diese Beschreibung soll an einer Graphik veranschaulicht werden.



Nach diesem Muster können durch Modifikation alle später folgenden Beschreibungen des Anwendes von Mathematik (Modellbildens) durch Experten aus dem Operations Research und Mathematikdidaktikern vorgenommen werden, wobei der größte Unterschied darin besteht, daß die Hertzsche Beschreibung ein kommutatives Diagramm darstellt, das auf die denknotwendigen Folgen ausgerichtet ist. Diese Arbeitsweise ist der Physik in weiten Bereichen angemessen, da die naturnotwendigen Folgen vielfach verfügbar sind in Form von Meßwerten.
Im Operation Research verhält sich dies oft anders, da die Modellergebnisse prognostisch eingesetzt werden und einer Interpretation bedürfen, also auf eine mögliche Wirklichkeit abgebildet werden.

Das nun folgende 9-schrittige Schema ist nicht als linearer Vorgang zu verstehen, vielmehr können u.a. Rücksprünge in vorher schon bearbeitete Schritte zu deren Modifikation vorgenommen werden. Zur Erläuterung der einzelnen Schritte dienen die Beispiele aus Kap. IV.

Schritt 1: Konfrontation mit einer Situation

Der Vorgang des Modellbildens wird dadurch eingeleitet, daß der Modellbildner mit einer Sitiation konfrontiert wird, die ihm zunächst mehr oder weniger amorph erscheint (z.B. Verkehr zwischen Produktionsstätten und Lagerhäuser, Feldmausplagen, Skiprospekt). Die unmittelbare folgenden Schritte sind darauf angelegt, die Situation zu strukturieren.

Schritt 2: Problemformulierung

Damit die Aktionen beim Modellieren auf ein Ziel ausgerichtet sind, müssen ein Problem und eine oder mehrere Fragen dazu formuliert werden. (Z.B. wie organisiert man den Verkehr zwischen Fabriken und Lagerhäusern, damit man geringste Transportkosten hat? Wie bekämpft man Mäuse? Wie teile ich meine Liftfahrten ein?) Die Formulierung erfolgt meist in der für die Situation natürlichen Sprache, d.h. also meist nicht in der mathematischen Sprache. Je klarer, enger verständlicher die Frage ist, um so günstiger, einfacher ist es für den Modellbilder. Die Formulierung soll widerspruchsfrei und deutlich sein. Was hierunter zu verstehen ist, erläutert POLLAK (1969) an der Frage:
"Welches ist der beste Weg von hier aus zum Flughafen?"
Die Schwierigkeit beginnt, wenn versucht wird, die Bedeutung von "beste" zu verstehen: Wenn man einen Mietwagen hat und es nicht besonders eilig hat, nimmt man den kürzesten Weg. Unter anderen Bedingungen könnte man die kürzeste zu erwartende Fahrdauer meinen. Je nach Tageszeit könnte man mit einem verhältnismäßig kurzen Fahrtweg zufrieden sein, auf dem möglichst wenige Fahrtunterbrechungen wegen der Vorfahrtsregeln entstehen. War man schon

früher in der Gegend, und welches ist die Sicherheit, mit der man auf neuen Strecken bleibt?"
In vielen Fällen ist es günstig, sich mit eventuell Betroffenen abzusprechen und Teamarbeit zu leisten. Vielfach sind Probleme aus der Industrie so umfangreich, daß sie ein einzelner in einer vernünftigen Zeit nicht lösen könnte.

Schritt 3: Klassifizieren des Problems

Im Sinne möglicher Arbeitsersparnis und der Anbahnung heuristischer Aktivitäten ist dieser Schritt bedeutsam. Gibt es ein schon gelöstes ähnliches Problem, so kann man auf die dort gewonnenen Erfahrungen zurückgreifen. Besonders einfach wird die Problemlösung wenn man auf ein Routineproblem stößt, wie ein lineares Optimierungsproblem. Für den heutigen Betrachter ist das Problem des Konservenfabrikanten ein Routineproblem, für DANTZIG war es das nicht und für einen Schüler ist es das auch heute noch nicht.

Schritt 4: Analyse der Situation, Daten sammeln

Unter dem Blickwinkel der Fragestellung wird die Situation beobachtet. Welche Beziehungen gelten zwischen den Dingen, die die Situation ausmachen? Man versucht, Daten zu sammeln. Welche Daten sind Konstanten, welche sind variabel, welche sind Entscheidungsvariablen? Welche Daten sind im Zusammenhang mit dem formulierten Problem nicht bedeutend? Können einige weggelassen werden, damit das spätere Modell möglichst einfach wird? Warum kann man die Daten weglassen?An dieser Stelle wird deutlich, daß in dem mathematischen Modell nicht alle Daten, Eigenschaften, Objekte der Situationen, repräsentiert werden können. Dies geschieht insbesondere aus Ökonomiegründen, um das Modell

handlich zu gestalten. Enthielte das Modell alle Daten usw. der Situation, so wäre es nicht mehr von der Originalsituation unterscheidbar und somit identisch mit dieser. Es gingen dann Vorteile verloren, die mit dem Übergang zum Modell verbunden sind; zum anderen ist die Situation meist zu komplex, als daß alles erfaßt werden könnte, auch wenn man wollte. Das Modell ist also eine Beschränkung auf das vermeintlich Wesentliche.
Wichtige Daten für den Konservenhändler sind Verschikkungskosten und Verbraucherzahlen; für den Skifahrer die Höhenmeter, die er geschleppt wird; für den Techniker die Größe des Rückhaltebeckens, wenn er Auslaufvorgänge betrachtet.
Bemerkung: Vielfach sind Schrit 2,3 und 4 vertauschbar oder mehrmals durchlaufbar, denn nach der Analyse der Situation kann ein Problem besser klassifiziert werden, und danach wiederum wird leichter erkennbar, welche Daten bedeutsam sind.

Schritt 5: Konstruktion eines Vormodells

Unter dem Vormodell wollen wir eine vereinfachte schematisierte Darstellung der Situation verstehen, die die zur Problemlösung wesentlichen Daten enthält. Mit der Konstruktion eines oder mehrerer Vormodelle wird die Basis geschaffen, von der aus das mathematische Modell konstruiert werden kann. Das Vormodell kann in verschiedenen Formen repräsentiert werden (z.B. graphisch, tabellarisch) und dem mathematischen Modell mehr oder weniger nahestehen.
Beispiele für Vormodelle:

- Die Rechnung zur Bestimmung chemischer Summenformeln baut darauf auf, daß als Vormodell eines Moleküls lediglich die Strukturformel in Form eines Graphen betrachtet wird. In der Strukturformel wird im wesentlichen nur die Nachbarschaftbeziehung der einzelnen Atome zueinander angegeben, während eine Reihe anderer Merkmale eines Moleküls unberücksichtigt bleibt.

- Die Schilderung über das Problem des Konservenfabrikanten enthält nur noch die Daten, die zur Anwendung des Simplexalgorithmus hinreichend und notwendig sind. Die Schilderung kann in eine Skizze übertragen werden. Von da aus ist der Weg zur Formulierung des mathematischen Modells nicht mehr weit.

- Als Vormodell, das der rekursiven Beschreibung $p_{z+1} = Ap_z$ der Entwicklung der Mäusepopulationen entspricht, kann ein Flußgraph genommen werden.

Schritt 6: Konstruktion eines mathematischen Modells

Auf der Grundlage des Vormodells wird ein mathematisches Modell angefertigt. Hilfreich ist es, wenn das Vormodell schon stark in die Nähe des mathematischen Modells gerückt war; wenn beispielsweise Symbole eingeführt oder je nach Problem iteratives Vorgehen angedeutet ist.
Wenn wir mathematische Methoden auf Problemsituationen (Bereiche) anwenden wollen, so können wir dieses zum großen Teil "nicht auf die Dinge des Bereichs (Problemsituation), sondern auf die sprachlichen Ausdrücke, in denen über die Dinge dieses Bereichs gesprochen wird. Dabei bedient man sich meist im Bemühen um Übersichtlichkeit und Kürze der Darstellung ... einer Symbolik." (W.L. FISCHER (1971), S. 69-70) Mit anderen Worten: Situationen des täglichen Lebens oder aus den Realwissenschaften sind mit den Mitteln der Mathematik nicht von vornherein bearbeitbar, sondern erst dann, wenn sie auf eine in der Mathematik gebräuchliche Form gebracht worden sind. Eine solche Form ist dann ein mathematisches Modell der Situation.
Der Übergang von Schritt 5 zu 6 kann fließend sein, so daß der Übertritt aus der Situationsebene (und der damit verbundenen Sprache) in die mathematische Ebene nicht schlagartig kommt.

Am Beispiel der Populationssituation kann dies verdeutlicht werden. In der Situationssprache redet man von einer Population. Das Pendant dazu in der Mathematik ist ein Vektor. Zwischen beiden vermittelt in einer "Mischsprache" (WITTMANN 1975b) der Populationsvektor. Das Vorhandensein einer Mischsprache dürfte insbesondere bei Interpretationsversuchen des mathematischen Ergebnisses hilfreich sein (Schritt 8).

Als methodisches Hilfsmittel beim Übergang vom Vormodell zum mathematischen Modell ist das Vorhandensein eines Lexikons hilfreich. Insbesondere werden dadurch reale Objekte in einen mathematischen Kontext gebracht, was einem direkt bestimmte mathematische Methoden und Sätze zum Einsatz bei der Problemlösung aufdrängt.

Beispiel:

Lexikon

Moleküle	Graphen
Moleküle mit Doppelbindungen und ohne Ringe	baumähnliche Graphen
Moleküle ohne Doppelbindungen und ohne Ringe	Bäume
Moleküle mit Ringen	Graphen mit Rundwegen
Atom	Ecke
Bindung	Kante
Wertigkeit	Eckengrad

Angewendete Sätze: Die Anzahl der Kanten ist die Hälfte der Summe der Eckengrade, Eulersche Polyedersatz usw.

Nicht immer kann eine derart klare kanonische Zuordnung von Begriffen aus dem Objektbereich und der Mathematik vorgenommen werden, insbesondere dann nicht, wenn man auf curve-fitting-Modelle ausgeht.

Zu dem mathematischen Modell gehört auch die Formulierung einer mathematischen Frage, die zu dem realen Problem gehört:
Beim Konservenfabrikanten: Für welchen Lösungsvektor nimmt die Zielfunktion minimalen Wert an?
Chemiebeispiel: Bestimme die Lösung eines Systems linearer Gleichungen und Ungleichungen!

Schritt 7: Lösung der mathematischen Fragestellung

Dies ist ein rein innermathematisches Problem. Falls es sich um ein bekanntes Modell handelt, greift man auf eventuell vorhandene Algorithmen zurück. (Im Beispiel des Konservenfabrikanten ist es der Simplexalgorithmus.) Falls solche auf das Modell zugeschnittenen Algorithmen nicht existieren, müssen sie geschaffen werden. Beispielsweise schafft sich der Schüler für das Skiliftproblem einen kleinen Satz: c ist als $x_1 a + x_2 b$ darstellbar, wenn ggT(a,b)/c.
Andererseits können allgemein anwendbare Näherungsverfahren eingesetzt werden. Dazu gehört u.a. die stochastische Simulation einer Situation.
Auch besteht die Möglichkeit, ein schwer lösbares mathematisches Problem zu transformieren in ein äquivalentes leichter lösbares mathematisches Problem. Dieser Vorgang wird auch innermathematisches Modellbilden genannt.
An dieser Stelle setzt in vielen Fällen die Numerische Mathematik ein, zu deren Aufgabe es gehört, Modelle in andere Modelle zu überführen, möglichst unter Angabe der Größenordnung möglicher Fehler (z.B.: Behälterbeispiel: Differentialgleichung-Differenzengleichung)! So kann eine Kette von Modellen entstehen, deren Lösung sich in einem gewissen Rahmen nicht unterscheiden. Die Lösung des Endmodells M_n approximiert die Lösung des Ausgangsmodells M_1.
Die Mittel zur Modelltransformation können Diskretisieren, Interpolieren, Extrapolieren, Approximieren usw. sein.

Es gibt weitere Gründe, um Modelle zu transformieren:

a) Ein Modell kann unter verschiedenen realen Fragestellungen betrachtet werden. Dabei kann sich herausstellen, daß ein Modell zur Beantwortung einer bestimmten Fragestellung nicht geeignet ist. Dies legt eine Modelltransformation nahe. Beispielsweise wurde in der Mäusesituation zur Beschreibung der Populationsentwicklung ein diskretes Modell in Form der iterierten Vektoren verwendet, während für die Schadensbestimmung eine stetige Funktion günstiger ist.

b) Ein Modell soll auf computergerechte Form gebracht werden, was oft bedeutet, daß ein iteratives Verfahren entwickelt werden muß.

c) Zu einer Situation können verschiedene Modelle und Lösungsverfahren entworfen werden, die
   - auf gleicher Abstraktionsebene liegen,
   - auf verschiedenen Abstraktionsebenen liegen und wesentlich vom mathematischen Wissensstand (sophisticated) des Schülers abhängen.
   (Beispiele hierzu siehe Kap. III)

Schritt 8: Interpretation des Ergebnisses

Das Ergebnis ist rein mathematischer Art und muß, soll es für die Situation bedeutsam werden, interpretiert werden. Liegt ein Lexikon vor, so kann dies bei einer Rückübersetzung hilfreich sein. Mit Schritt 8 wird die mathematische Ebene verlassen, und man befindet sich wieder in der Situationsebene. Auch wenn ein Lexikon vorhanden ist, kann die Interpretation schwierig sein. Beispiel: Liegen bei der Bestimmung von Summenformeln genaue Meßergebnisse vor und werden keine Doppelbindungen ermittelt, so benutzt man Bäume als Modelle der

Moleküle und die Gleichung k = e - 1. Nun kann es sein, daß das System linearer Gleichungen und Ungleichungen keine Lösung besitzt. Was kann hieraus gefolgert werden? Geht man davon aus, daß die Messungen korrekt waren, bleibt als einzige ungeprüfte Stelle die Gleichung k = e-1. Mit dieser ist die Annahme gekoppelt, daß das Modell als Baum darstellbar ist. Es liegt nahe, diese Annahme fallen zu lassen. Somit könnte der Weg frei sein, Graphen mit Rundwegen einzusetzen, die Gleichung f = k - e + 2 anzuwenden und auf Moleküle mit Ringstruktur zu stoßen.

Schritt 9: Kontrolle

Die Interpretation der mathematischen Lösung muß - falls möglich - an den Ergebnissen der Realität überprüft werden. Klaffen Beobachtungen und Interpretationen zu weit auseinander, dann muß das Modell geändert werden. Es kann so eine ganze Folge von Modellen entstehen, die eventuell die Situation immer besser erfaßt. Diesen Vorgang, den die Engländer "modelfitting" (Modellanpassen) nennen, sehen KLAUS und andere Autoren im Sinne eines Regelkreises. Einher geht oft eine steigende Komplizierung der Modelle und somit eine erschwerte und teuere Bearbeitung. Somit ist das endgültig verwendete Modell als Kompromiß anzusehen, der aus dem Streben nach möglichst großer Genauigkeit und dem Streben nach einfacher Handhabung entsteht.

In der folgenden Abbildung ist der Fortgang des Modellbildens für das Beispiel zur Bestimmung von chemischen Summenformeln nochmals zusammengefaßt.

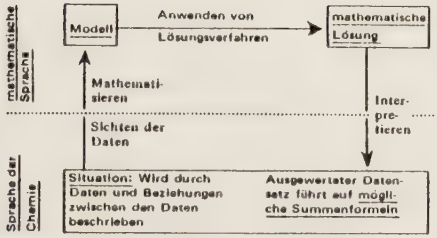


Abb 2: Vorgang des Anwendens von Mathematik als Pendeln zwischen zwei Sprachebenen.

Aus der Figur wird ersichtlich, daß die Bearbeitung einer Situation unter Einbeziehung mathematischer Mittel auch ein sprachliches Problem aufwirft. Es wird Schwierigkeiten geben bei der Übersetzung der Situationssprache in die mathematische Sprache und umgekehrt. Derjenige wird Vorteile haben, der beide Sprachen gleich gut spricht, sich also in der Mathematik genauso gut auskennt wie in der Situation. Dies wird jedoch selten der Fall sein. Somit bietet sich eine Teamarbeit an. Die beteiligten Personen sollten auf ihrem Gebiet Fachmann sein und teilweise exakte Kenntnisse und "intuitive-Kenntisse" für das andere Gebiet aufweisen, so daß durch die Kenntnisse der beteiligten Personen eine Verzahnung der mathematischen Ebene mitder realwissenschaftlichen bzw. situationsgebundenen Ebene entsteht.

Mathematische Kenntnisse

Realwissenschaftliche, situationsgebundene Kenntnisse

Betrachten wir das 9-schrittige Schema im Zusammenhang, so können die Berührungspunkte zwischen Realwissenschaft und Mathematik und das Wechselspiel zwischen Anwendungen und Reiner Mathematik lokalisiert werden: Die Mathematik erhält Impulse, wenn es um die Aufstellung und Bearbeitung bisher unbekannter Modelle geht. Dies regt zur Suche nach neuen Lösungsalgorithmen an und kann so den mathematischen Wissensbestand erweitern. Die Realwissenschaften ihrerseits profitieren von der mathematisierten Fassung ihrer Problemsituationen.

Ein Überzeugendes Beispiel liefert ZIEGLER (1972, S.27). Er führt die Autoritätsstruktur eines Betriebes in einen gerichteten Graphen[1] über und quantifiziert die soziologischen Begriffe, hierarchische Ebene, formaler Status, formales Prestige, in dem er ihnen in der Graphentheorie gebräuchliche Begriffe zuordnet, deren Werte durch bestimmte Algorithmen für den Graphen bestimmt werden.
Ein besonderer Vorteil in der Bearbeitung einer Situation mittels eines mathematischen Modells liegt darin, daß die den konkreten Gegenständen zugeordneten Zeichen physikalische und andere Eigenschaften wie Masse, Hitze, finanzieller Wert, Größe usw. verloren haben. Sie werden so indirekt handhabbar. Wir können an dem Modell Handlungen vornehmen, ohne die korrespondierenden Handlungen in der Realität durchführen zu müssen. FREY (1961) formuliert das folgendermaßen: "Das Modell ist etwas, mit dem wir anstelle einer nicht faßbaren Wirklichkeit operieren."
Da man im Modell von realen Eigenschaften der Situation abheben kann, wird die Dynamik der Situation manipulierbar, der zeitliche Ablauf beeinflußbar. So kann die Bearbeitung

---

1) In diesem Zusammenhang sei auf die didaktischen Betrachtungen von WALTHER (1976) und MALLE (1977) über die Balance von sozialen Strukturen hingewiesen.

einer Situation über ein mathematisches Modell zeitsparend und kostensparend sein: Fehlplanungen können eventuell vermieden werden; denn Modelle und die einwirkenden Handlungen können abgeändert werden, ohne die reale Situation selbst zu verändern. Auf der Modellebene sind Handlungen und deren eventuelle Auswirkungen reversibel. Außerdem sind Handlungen am Modell beliebig oft wiederholbar und somit Ergebnisse nachprüfbar. Die Ergebnisse und Handlungen, die an Modellen gewonnen werden, sind jedoch nicht mit denen in der Realität zu identifizieren, sie können als Entscheidungshilfe für oder gegen bestimmte geplante Handlungen genommen werden, oder falls die Realität nicht faßbar ist, als Realitätsersatz genommen werden. Die Qualität der Prognose, die aus dem Modell folgt, hängt wesentlich davon ab, wie "gut" das Modell die Situation erfaßt.
Bei dem Umgang mit mathematischen Modellen treten Unterschiede in der Arbeitsweise eines reinen Mathematikers und eines Mathematikers auf, der mehr auf die Lösung der realen Problemsituationen konzentriert ist. Der reine Mathematiker wird versuchen, möglichst vielseitige Folgerungen aus dem Modell zu ziehen, die vollkommen unabhängig von den realen Problemen sein können, während für den ganz pragmatischen Anwender das Problem nach dessen Lösung seine Bedeutung verloren hat.

Mit diesem Abschnitt ist nun eine Grundlage für eine Didaktik vom ausgewogenen Bild der Mathematik geschaffen worden. Im folgenden Kapitel wird die Diskussion unter stärker didaktischem Gesichtspunkt fortgeführt.

K A P I T E L III

BEITRÄGE ZU EINER PRAKTISCHEN UNTERRICHTSLEHRE FÜR DEN ANWENDUNGSASPEKT IM RAHMEN EINES AUSGEWOGENEN MATHEMATIKUNTERRICHTS

Bevor wir mit den Kapiteln III und IV den zweiten Teil dieser Arbeit angehen, scheint es angebracht, die in der Einleitung ausgeführten Bemerkungen zur Methodologie der Mathematikdidaktik erneut aufzunehmen und in bezug auf die verbleibenden Kapitel weiter auszuführen. Dadurch soll das Vorgehen in diesen Kapiteln in einen größeren Rahmen eingeordnet werden.

Eine kohärente Didaktik eines anwendungsbezogenen Mathematikunterrichts ist m.E. nur dann zu erreichen, wenn die Konstruktion von Unterrichtsvorlagen, theoretische Überlegungen, empirische Untersuchungen, erziehungsphilosophische Reflexionen, die Entwicklung praktischer Unterrichtslehren aufeinander bezogen und interdisziplinär verankert werden.
Den erkenntnistheoretischen und pädagogisch-normativen Aspekt unseres Themas haben wir in Kapitel II behandelt. Daran sollen im vorliegenden Kapitel Vorstellungen zu einer praktischen Unterrichtslehre angeschlossen werden, ehe in Kapitel IV die konstruktive Komponente in den Vordergrund rücken wird.

E. WITTMANN (1976[4], S.3) sieht praktische Unterrichtslehren als Verbindungsglied zwischen didaktischer Theorie und dem Unterricht an. Ihr Zweck ist es, "konstruktive Anleitungen" für Planung und Durchführung konkreten Unterrichts anzubieten.

In bezug zu den übrigen Hauptgebieten haben praktische Unterrichtslehren eine selektierende und komprimierende Aufgabe: Nicht die Gesamtheit der von der Mathematikdidaktik angebotenen Unterrichtsvorlagen kann in konkretem Unterricht eingebracht werden, ebensowenig wie die Vielfalt miteinander konkurrierender Erziehungsziele, theoretischer Vorstellungen und empirischer Befunde.

Das folgende Konzept hält sich an das in Kapitel II beschriebene ausgewogene Bild der Mathematik und das daran orientierte genetische Prinzip (in der Version von E. WITTMANN). Der dadurch gegebene Rahmen soll ausgefüllt werden.

1. Das genetische Prinzip und drei Standpunkte beim Mathematisieren

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Postulat formuliert, den Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen an einer Grundauffassung von Mathematik zu orientieren, die kurz als "ausgewogenes Bild der Mathematik" ausgedrückt werden kann. Dieses sehr allgemeine Postulat bedarf im Hinblick auf den Unterricht der Konkretisierung. Dazu eignet sich in einem ersten Schritt das genetische Prinzip[1)], da dieses Prinzip gerade die Beziehungen zwischen reiner Mathematik und Anwendungen besonders berücksichtigt.

In diesem ersten Abschnitt soll das genetische Prinzip kurz charakterisiert und ein sehr wichtiger Teilaspekt (drei Standpunkte des Mathematisierens) ausführlicher entwickelt und ausgestaltet werden. Inhaltlich setzt der Abschnitt auch den Abschnitt 2 von Kapitel II fort, jedoch in einem viel engeren Bezug zum Mathematikunterricht.

1.1. Das genetische Prinzip

Eine Reihe von Didaktikern, Mathematikern, Pädagogen und Psychologen (z.B., F. KLEIN, O. TOEPLITZ, M. WAGENSCHEIN, H. KARASCHEWSKI, J. PIAGET, H. FREUDENTHAL) haben in der Vergangenheit mit unterschiedlichen Schwerpunkten Konzepte zu einem "genetischen" Unterricht entwickelt, wie sie das "genetische Prinzip" zu fassen sucht.

[1)] Eine ausführliche Schilderung des genetischen Prinzips geben E. WITTMANN (1974, Abschnitt 10) und G. SCHUBRING (1976).

Wittmann (1976a) sieht im genetischen Prinzip drei Hauptforderungen:

" (i) Es ist auszugehen von Problemkontexten in- und außerhalb der Mathematik.

(ii) Die Mathematik soll mit ihren Anwendungen aufs engste verflochten werden.

(iii) Der Unterricht soll am Vorverständnis der Schüler ansetzen."

Insbesondere der Punkt (i) macht deutlich, daß der Schüler Mathematik als Prozeß erleben soll und nicht als Fertigprodukt. Jedoch läßt sich hieraus keine (falsche) Dichotomie "Science faite - Science à faire"[1] ableiten. Vielmehr ist das genetische Prinzip mit der Forderung verträglich, daß sich der Unterricht inhaltlich auf die grundlegenden Begriffe mathematischer Diziplinen stützen soll. Diese Begriffe werden aber im Rückblick über das fertig bestehende Gebäude der Mathematik und aus seiner Genese gewonnen. WITTMANN sieht das genetische Prinzip wegen seines übergreifenden Charakters als oberstes Prinzip des Unterrichts an. In der Tat integriert es in einer für die Mathematikdidaktik typischen Weise Erkenntnisse aus den für den Mathematikunterricht besonders wichtigen Diziplinen Mathematik, Psychologie, Pädagogik, Erkenntnistheorie.

---

[1] Diese Formulierung findet sich bei REVUZ, 1968

Im Rahmen dieser Arbeit sind natürlich die Forderungen (i) und (ii) von besonderem Interesse.

E. WITTMANN (1976a) beschreibt einige dieser Aktivitäten durch drei "Standpunkte des Mathematisierens" genauer, die vom Lernenden (und Forschenden) eingenommen werden können:

" (1) Schaffung und Weiterentwicklung mathematischer Instrumente bei der Auseinandersetzung mit neuartigen Problemen in der Wirklichkeit oder der Mathematik.

(2) Schematisierung und begrifflich-strukturelle Analyse der gemäß (1) entwickelten Instrumente.

(3) Anwendung (in mehr oder weniger schematisierender Form) verfügbarer Instrumente auf weitere Probleme innerhalb und außerhalb der Mathematik".

1.2. Einzelbeiträge zu den drei Standpunkten des Mathematisierens

Im folgenden werde ich mich mit den drei Standpunkten des Mathematisierens weiter auseinandersetzen. Zunächst sollen Einzelbeiträge referiert werden, in denen diese Standpunkte explizit angesprochen werden. Dazu wird teilweise Literatur herangezogen werden, die schon in Kapitel I verwendet wurde. Aus der Didaktik des Sachrechnens sind es vor allem Beiträge von OEHL und KARASCHEWSKI.

Obwohl die drei Standpunkte im Modellbildungsvorgang versteckt sind, finden sich dazu in der angelsächsischen Literatur keine expliziten Beiträge.[1)]

Markante Beiträge sind aber im europäischen Rahmen von VAN HIELE, FREUDENTHAL, REVUZ und KRYGOWSKA geleistet worden: Erstaunlicherweise ergeben sich zu den drei Standpunkten aus dem Literaturkreis zur Meraner Reform keine deutlichen Hinweise.

Beginnen wir mit der Didaktik des Sachrechnens: Für W. OEHL (1965, S. 112) ist es oberstes Ziel der Grund- und Hauptschüler, die "Rechenfähigkeit" zu schulen. Rechenfähigkeit zeigt sich im Lösen von Sachaufgaben und erfordert als Voraussetzung die Rechenfertigkeit, die Fertigkeit im "reinen Zahlenrechnen".

Die Frage ist, wie sich Rechenfähigkeit erreichen läßt. Rechenfähigkeit ist in entscheidender Weise mitbestimmt durch die Art und Weise, wie der Schüler bei der Einführung eines neuen Begriffs zur Fertigkeit im rechnerischen Umgang mit diesem Begriff

---

1) Aus meiner Beschäftigung mit britischer und amerikanischer Literatur zur Didaktik habe ich den Eindruck gewonnen, daß dort keine große Neigung zur Bildung didaktischer Theorien besteht. Bücher im Stile von KARASCHEWSKIs "Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts" oder E. WITTMANNs "Grundfragen des Mathematikunterrichts" sind nicht zu finden. Vielmehr wird dort auf sorgfältig ausgewählten Unterrichtsbeispielen aufgebaut.

hingeführt wurde. ... Die Herleitung und Entwicklung neuer Begriffe und der Operation mit ihnen muß von Sachzusammenhängen ausgehen und durch eigenes Tun von den Kindern anschaulich und konkret vollzogen werden." (OEHL 1962, S. 19). In diesem Vorgehen sieht OEHL (1962, S. 17) eine Dreigliederung des Mathematischen Denkens:

" (a) Konkret-anschauliches Tun in der Sachsituation -
(b) Übergang zum Zahlenrechnen und Rechenfertigkeit -
(c) mathematische Einsicht in andere Sachsituationen (Anwendung und Rechenfähigkeit)."

Diese Dreigliederung kann durchaus in Einklang mit den oben aufgeführten drei Standpunkten gebracht werden. Nur ist nicht klar, ob mit (b) die Schematisierung und begrifflich strukturelle Analyse gemeint ist, oder ob es sich eher um eine Tätigkeit im Sinne von Standpunkt (1) handelt, wo es sich um die Entwicklung eines mathematischen Werkzeugs handelt, das nicht in besonderer Weise analysiert wird. (Der Übergang von (1) zu (2) ist natürlich fließend.)

Verdeutlicht wird der Zusammenhang durch ein Schemabild (OEHL, 1962, S. 21)

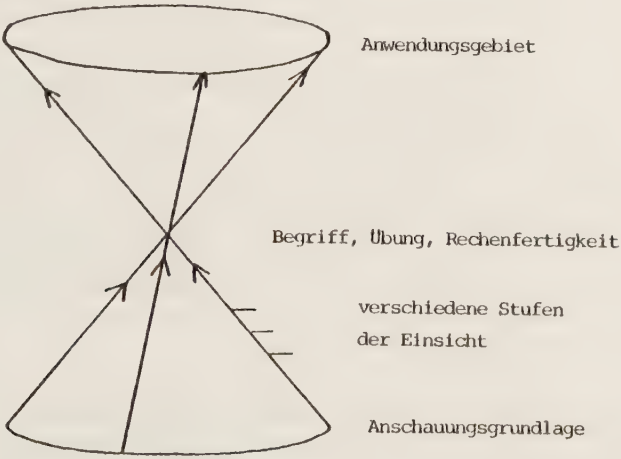


Abb.3 Begriffsbildung nach W.OEHL

In dem Kommentar zu diesem Schema wird deutlich, daß OEHL dem mathematischen Begriff keine Eigendynamik zukommen läßt; vielmehr wird der aus einer Situation "ausgeprägte" Begriff in (b) an "reinen Rechenfällen" eingeübt und dann folgt seine vielfältige Anwendung auf Sachgebiete.

In aller Deutlichkeit faßt KARASCHEWSKI (1969, S. 142 - 145) die drei Standpunkte unter dem "Prinzip des 'Kreislaufs' eines jeden Rechenlehrgangs" zusammen:

" (i) Jeder Rechenlehrgang nimmt zunächst Bezug auf konkrete Sachverhalte, die geeignet sind,

Anschauungs- und Motivationshilfe für ein bestimmtes Rechenverfahren zu leisten.

(ii) Um das dieser Sachsituation entsprechende Rechenverfahren in seinem ganzen Umfang erfassen und einüben zu können, muß es von der Ausgangskonkretion gelöst und in konkretionsfreien Operationen weitergeführt werden.

(iii) Darauf kehrt man wieder zur Betrachtung von Wirklichkeitsbereichen zurück. Diese wird mit Hilfe des nun fertigen und geläufigen Rechenverfahrens erweitert und vertieft." [1)]

Die Punkte (ii) und (iii) erläutert KARASCHWESKI so: "Jeder Lehrgang gibt also in einem mittleren Teil den Sachwirklichkeitskontakt auf, um ihn nach vielfältigen Begriffseinübungen nur um so intensiver aufzunehmen."

Zwei Bemerkungen sollen hier zu dem "Kreislauf" gemacht werden.

1) Die Numerierung von (i) - (iii) und Absatzbildung ist von mir vorgenommen.

1) KARASCHEWSKI (1970, S. 48) unterscheidet eine "zweifache Funktion der Sachwirklichkeit:" In (i) dient die Situation zur Erarbeitung einer mathematischen Operation. Das Interesse liegt nicht an der speziell vorliegenden Situation. In (iii) ist es umgekehrt: Die Mathematik dient zum Lösen von Problemsituationen.

2) KARASCHEWSKI weist nicht darauf hin, daß der Kreislauf in anderer als der vorgegebenen Reihenfolge durchlaufen werden kann. Es kann aber durchaus sinnvoll sein, nach dem Schritt (i) den Schritt (iii) folgen zu lassen, insbesondere wenn ein Problem von besonderer Aktualität ansteht.

Anfangs wurde schon erwähnt, daß in das genetische Prinzip auch die Auffassung von Mathematik als Tätigkeit eingearbeitet ist.

Die Literatur zu diesem Thema ist noch nicht sehr umfangreich und FREUDENTHAL (1973, Bd. I, S. 155ff) formuliert als Forschungsaufgabe die "Analyse der Mathematik als einer Tätigkeit."

FREUDENTHAL gibt einige Hinweise: Der zentrale Satz ist meines Erachtens:
"Die mathematische Tätigkeit besteht, ..., in dem Ordnen von Erfahrungsfeldern."
Erfahrungsfelder können Umweltsituationen oder Erfahrungen sein, die im Umgang mit mathematischen Objekten gewonnen wurden. Diese Tätigkeit entspricht dem Standpunkt 2, setzt aber den Standpunkt 1 voraus, in dem die Erfahrungen gesammelt werden. Standpunkt 2 kann mit unterschiedlicher Intensität eingenommen werden. Einmal können Erfahrungen "lokal geordnet" werden. (Beispiel: Erfahrungen aus dem Umgang mit

Parallelogrammen können sich zu einer formalen Definition verdichten.) Später kann lokal geordnetes Material zu einer Theorie ausgebaut werden.

Standpunkt 3 wird jedoch nicht aufgeführt. FREUDENTHAL baut in diesem Zusammenhang auf VAN HIELE (1959) auf, die den Lernprozeß in der Mathematik als ein Durchlaufen verschiedener Niveaus beschreibt. FREUDENTHAL beschreibt den Kern der Niveaufolge folgendermaßen: "Die Aktivität auf einem Niveau wird auf dem nächsten Niveau der Analyse unterworfen."

Die VAN HIELEsche Niveautheorie ist meines Erachtens eine Theorie, die sich auf den ersten und zweiten Standpunkt spezialisiert hat. Sie beschreibt im wesentlichen einen Vorgang, bei dem abwechselnd der erste und der zweite Standpunkt eingenommen wird. Bei konsequenter Anwendung gelangt man so zu immer abstrakteren Begriffen, mit denen eine Ablösung der Mathematik von ihren realen Quellen erfolgt, ohne daß man Anwendungen mitbedenkt. Hiermit scheint mir der Weg einer autarken Mathematik beschrieben zu sein.

Aus der Sicht der allgemeinbildenden Schule ist es besonders wichtig, daß FREUDENTHALs und VAN HIELEs Aussagen in Synthese mit den Aussagen von KRYGOWSKA und REVUZ gesehen werden, die den dritten Standpunkt mitbedenken. Nur so können die vielfältigen Beziehungen Mathematik - Umwelt erfaßt werden.

Ebenso konsequent wie FREUDENTHAL vertritt REVUZ eine Didaktik des Mathematisierens, in der der Schüler in erster Linie Mathematik als Prozeß erleben soll. Ausgangspunkt seiner Überlegungen ist die Dichotomie "Science faite - Science à faire" (REVUZ, 1968a). Er wendet sich vor allem gegen die "statische traditionelle Instruktion" und fordert im Unterricht

"die dynamische 'Science' " (REVUZ, 1968a).
Diese kann verwirklicht werden, wenn im Unterricht der Weg "von der Situation zum Modell und Theorie und von der Theorie zur Situation und Modell beschritten wird." (REVUZ, 1971).

Eine Beschreibung dieses Weges durch Aktivitäten, der KARASCHEWSKIs "Kreislauf eines Rechenvorgans" entspricht, wird von REVUZ nicht vorgenommen. Auch KRYGOWSKA (1968) gelangt in ihrem programmatischen Aufsatz "Processes de la Mathématisation dans l' enseignement" zu keiner nähren Beschreibung, vielmehr stellt sie diese als noch nicht gelöste Forschungsaufgabe dar, insbesondere in bezug zum dritten Standpunkt. KRYGOWSKA formuliert als wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts, daß der Schüler Mathematik "in natürlichen Situationen" anwenden lernt, zu deren Lösung "entweder die Intervention der mathematischen Methode oder die Anwendung einer schon entwickelten mathematischen Theorie" erforderlich ist. Sie unterscheidet hier im wesentlichen den ersten und dritten Standpunkt.

1.3. Beschreibung der drei Standpunkte des Mathematisierens

Im folgenden werden die drei Standpunkte des Mathématisierens ausführlich dargestellt, wobei die Beschreibung von E. WITTMANN (1974[1]) als Grundlage dient. Diese Beschreibung erfährt unter folgenden Gesichtspunkten eine Ergänzung:

1. Es werden Parallen zum Modellbildungsvorgang gezogen.

2. Es werden die verschiedenen Sprachebenen betrachtet.
3. Es werden Bemerkungen zur Dynamik und Reichweite der Standpunkte eingefügt, wobei von Interessenslagen des Einzelnen ausgegangen wird.

Das Durchlaufen der drei Standpunkte hat mit dem Modellbilden vieles gemeinsam und ist teilweise mit diesem zu identifizieren. Im Grundmuster stimmen beide Vorgänge überein: Es handelt sich um einen Vorgang, der erstens von einer meist realen Situation, also der Sachebene ausgeht; zweitens in die Modellebene als einer Ebene größerer Abstraktion führt und drittens in die Sachebene zurückführt.

Ein Unterschied dürfte darin liegen, daß das Modellbilden, wie es in Kapitel II beschrieben ist, auf ein spezielles mehr oder weniger stark umgrenztes Problem zentriert ist - also zur Beschreibung eines lokalen Vorgangs geeignet ist, während die drei Standpunkte unter einer umfassenderen Perspektive eingenommen werden können. Auch kann Modellbilden in jedem der einzelnen Standpunkte stattfinden. Für den ersten und dritten Standpunkt ist das offensichtlich. Modellbilden im zweiten Standpunkt ist innermathematisches Modellbilden. Der Ebenenwechsel kann darin bestehen, daß Methoden einer anderen mathematischen Disziplin zur "Modellierung" der Ausgangsdisziplin benutzt werden,oder daß innerhalb einer Disziplin Erkenntnisse von einem höheren Niveau (im VAN HIELEschen Sinne) rückinterpretiert (angewendet) werden auf ein niedrigeres Niveau.

Es folgt nun eine mehr ins Einzelne gehende Beschreibung der drei Standpunkte durch spezifische Aktivitäten. Sie werden später an den im Kapitel IV zusammengestellten Beispielen erläutert. Die Darstellung der drei Standpunkte erhält ihren Schwerpunkt aus dem Blickwinkel der Beziehung Mathematik - Umwelt; der Bezug zu innermathematischem Arbeiten wird nur am Rand gestreift.

(1) Schaffung und Weiterentwicklung mathematischer Instrumente.

Im Mittelpunkt der Aktivitäten steht hier die Auseinandersetzung mit neu aufgetauchten Problemen der Wirklichkeit oder der Mathematik.

Beispiele: Phänomene bei auslaufenden Wasserbehältern; Liftkartenproblem.

Zur Lösung dieser Probleme wird ein mathematischer Apparat entwickelt bzw. weiterentwickelt, der aus teilweise bekannten oder neu zu entwickelnden Begriffen und Verfahren besteht.

Beispiel: Beim Liftproblem sind es Punktetabellen, Ecken der Tabellen, Begriffe wie "mögliche Fahrtenkombinationen" oder Verfahren wie Absuchen der "Eckenwerte" auf den größten Wert hin.

Auf diese Weise werden die kognitive Struktur des Lernenden (oder Anwenders) erweitert und ein Erfahrungs- und Begriffsfeld angelegt, das später Gegenstand für die Aktivitäten des zweiten Standpunktes sein wird. Das neue Instrumentarium kann noch stark konkrete Züge tragen, ganz in der Sprache des Problemkontextes - der "Situationssprache" formuliert sein.

Beispiel: In den Tabellen trägt anfangs noch jede Eintragung die Bezeichnung "Punkte"; oder ein Schüler formuliert seine Erkenntnisse folgendermaßen: "Am Ziegenhüttlilift und der Albeinabahn kann ein Läufer von seiner 40-Punkte-Karte höchstens 39 Punkte verfahren."

Im Unterricht ist es vielfach sogar so, daß verschiedene Schüler zum gleichen Problem für das erworbene Arsenal von Begriffen und Strategien verschiedene Bezeichnungen schaffen; jeder führt sozusagen seine eigene Sprache ein. Dies geschieht vor allem dann, wenn den Schülern genügend Zeit gelassen wird, sich mit der Situation auseinanderzusetzen und nicht von außen Bezeichnungsweisen angetragen werden. Ein natürlicher Druck zur Vereinheitlichung der Sprache entsteht, wenn in einer Gruppe über die Situation gesprochen wird. [1)]

Die sprachliche Erfassung des erworbenen Arsenals kann oft nur unvollständig oder gar nicht erfolgen, vielmehr wird es mehr informell und implizit benutzt. Es wird gehandhabt! Das Augenmerk des Schülers liegt auf der Problemlösung, die benutzten Mittel werden noch nicht analysiert.

Die mit dem ersten Standpunkt verbundene Arbeitsweise ist für bestimmte Berufe typisch, z.B. bei Ingenieuren, Wirtschaftswissenschaftlern und auch bei Naturwissenschaftlern. Dort genügt es in den meisten Fällen Mittel parat zu haben oder zu entwickeln, die beim Lösen eines aktuellen Problems oder einer Problemklasse erfolgversprechend eingesetzt werden können. Über die mathematischen Eigenschaften der eingesetzten Mittel wird meist nicht weiter nachgedacht.

Beispiel: Der Diplomkaufmann GIESEN veröffentlicht als erster 1958 einen primalen-dualen Simplexalgorithmus, der ohne künstliche Variable arbeitet und bei dem die Pivotauswahlregeln der primalen und dualen Methode kombiniert werden. Über den Nachweis der Konvergenz wurde nichts mitgeteilt. Es genügt ihm offensichtlich, daß das Verfahren in den betrachteten Fällen funktionierte.

---

1) Ein Beispiel hierzu liefert PAPERT (1970). Er beschreibt Aktivitäten und die Bildung von Bezeichnungen durch Schüler die geometrische Erfahrungen beim Umgang mit einer programmsteuerbaren Schildkröte sammeln.

(2) Begrifflich-strukturelle Analyse (Schematisierung)

Bei dieser Aktivität wird ein Standpunkt eingenommen, bei dem die Betrachtung der ursprünglichen Probleme in den Hintergrund tritt. Dies wird der Fall sein, wenn ein theoretisches Interesse besteht, das über die unmittelbare Problemlösung hinausgeht. Es wird beim jungen Schüler nicht automatisch eintreten und sollte dann angeregt werden, wenn einige reale Probleme gelöst sind, er sich in einer Problemsituation "frei bewegen" kann und einen Schatz an Erfahrungen angelegt hat. Erst dann ist es möglich, das in (1) verwendete Arsenal von anderer Warte aus zu betrachten, die Erfahrungen zu ordnen und nach allgemeingültigen Regeln zu suchen. Für den jungen Schüler können die Aktivitäten des Standpunkts (2) auch mit dem Begriff "Lokales Ordnen" bezeichnet werden, während der ältere Schüler schon Mikrotheorien entwickeln kann.

Als eine Methode zur Anregung des zweiten Standpunktes sei hier auf das operative Prinzip verwiesen (WITTMANN, 1976b). Mit seiner grundlegenden Frage "Was passiert, wenn...?" fordert es geradezu heraus, auf das in (1) entwickelte Instrumentarium einzuwirken und Beobachtungen anzustellen.
Beispiele: (i) In dem Populationsbeispiel wurde durch Abändern der Koeffizienten in den Matrizen eine kleine Untersuchung über Potenzen von Matrizen angeregt.
(ii) Systematisches Abändern der Liftfahrkarten führte auf Vermutungen über die Darstellbarkeit von natürlichen Zahlen als Linearkombinationen.

In welchem Maße das gemäß (1) entwickelte Instrumentarium dabei von konkreten Problemkontexten gelöst werden kann, in welchem Maße eine Distanzierung von diesen erfolgt, hängt von den Gegebenheiten ab:

a) Maßgeblich dafür kann das berufliche Interesse sein. Der Ingenieur wird, wenn er Standpunkt (2) überhaupt einnimmt,

im engen Rückbezug auf die Problemsituation arbeiten und jede Interpretationsmöglichkeit neu gewonnener Einsichten ausnutzen und sein Interesse an (2) wird erlahmen, wenn (2) keinen unmittelbaren Nutzen mehr verspricht.
Anders der Mathematiker.Für ihn kann das in (1) entwickelte Instrumentarium langanhaltende Untersuchungen auslösen, in denen die Beziehungen zur Sachebene vollkommen abgeschnitten werden. An der Rückinterpretation gewonnener Erkenntnisse in die Sachebene wird eventuell nicht mehr gearbeitet. So können sich Theorien entwickeln, deren reale Ursprünge später nur schwer erkennbar sind.

b) Das Maß der Distanzierung hängt beim Schüler vor allem von seiner intellektuellen Reife und der Themenwahl ab.
Grundschulkinder sind zwar in der Lage, die natürlichen Zahlen von der Wirklichkeit abzuheben und als Objekte"sui generis" ersten strukturellen Analysen zu unterwerfen. Es gelingt ihnen aber noch nicht die weitergehende Distanzierung, die für eine axiomatische Untersuchung der Zahlen als strukturierte Menge nötig ist.
Vielfach identifiziert der Schüler die mathematischen Objekte mit den zugehörigen realen Objekten. Daß bei der Einnahme des 2. Standpunktes prinzipiell ein Ebenenwechsel vonstatten geht, wird ihm kaum bewußt. [1] Die Übergänge zwischen beiden Ebenen sind jedoch fließend und können stufenweise vollzogen werden.

Eine ausdifferenzierte mathematische Sprache und Symbolik ist nicht Voraussetzung, um den zweiten Standpunkt einzunehmen. Es kann durchaus auch in der Situationssprache oder in einer Mischsprache, die aus Teilen der Situationssprache und der Sprache der Mathematik besteht, über die im ersten Standpunkt entwickelten Instrumente nachgedacht werden.

---

1) Dies bewußt zu machen, ist eine wichtige didaktische Aufgabe, die im 2. Abschnitt bearbeitet werden soll.

Beispiele: (i) Deutliches Beispiel dazu ist die Argumentation zur Analyse der Punktetafeln der Skiliftsituation. Inhaltlich wird dort die gleiche Mathematik betrieben, wie wenn die Sprache der Operatorennetze benutzt wird.
(ii) Ein in der Schule gebräuchliches Beispiel ist die Argumentation für Eulersche Wege durch Graphen. Die dabei benutzten Schemazeichnungen von Stadtplänen sind Graphen, die Ecken heißen Stadtteile, die Kanten heißen Straßen und Brücken usw.
(iii) WITTMANN (1975b) spricht für die Zusammenfassung verschiedener Altersgruppen einer Population von einem "Populationsvektor."

Es scheint mir - gerade unter dem Gesichtspunkt der Einschätzung der Arbeit von Kindern - wesentlich, daß die in der Situationssprache betriebene Mathematik keine minderwertige Mathematik sein muß; es ist nur eben ein anderer "Jargon".

Es bleibt jedoch vielfach durchaus Ziel des Unterrichts, zur mathematischen Fachsprache hinzuführen, weil damit der Ökonomieeffekt hervorgehoben werden kann, den die Einführung mathematischer Sprech- und Schreibweisen mit sich bringt ("Modellsprache" für viele verschiedene Situationen).

Beispiele: (i) vgl. die in Kapitel IV, 2 aufgeführten verwandten Situationen zum "Liftkartenproblem."
(ii) In Kapitel IV, 4 wird u.a. die allgemeine Summenformel $\sum_{i=1}^{n} (2-z_i)e_i = 2$ für Moleküle ohne Ringe und ohne Doppelbindungen hergeleitet. (z_i gibt die Wertigkeit des i-ten Elements an und e_i die Anzahl der Atome des i-ten Elements). In der Chemie ist (in anderer Schreibweise) die Darstellung einer Vielfalt von Spezialfällen üblich ohne den allgemeinen Zusammenhang zu betrachten.

Die Erarbeitung oder Benutzung einer mathematischen Sprache, also einer abstrakten Sprache, könnte vor allem auch dazu führen, daß der Transfer der etwa am Skiliftproblem gewonnenen Einsichten auf andere aber ähnlich strukturierte Situationen leichter möglich wird. Ein Grund dafür könnte darin liegen, daß die Mathematik nicht so sehr an den Objekten interessiert ist, sondern vielmehr an ihren Eigenschaften und Beziehungen untereinander. Gerade das ist bei verwandten Situationen entscheidend. Die Objekte wechseln, ihre Beziehungen sind aber

vergleichbar. Gelegentlich kann bei der Bearbeitung eines realen Problems die schnelle Einführung einer mathematischen Sprache die Problemlösung erleichtern.

Beispielsweise wurden durch die Sprache der Graphen, im Zusammenhang mit der chemischen Summenformelbestimmung, einige Gesetzmäßigkeiten über Graphen direkt auf Moleküle übertragbar.

Zusammenfassend können die Aktivitäten des zweiten Standpunktes dadurch charakterisiert werden, daß der in (1) entwickelte Apparat begrifflich und sprachlich präzisiert, einer Abstraktion, einer Strukturanalyse und einem Strukturvergleich mit schon bekannten mathematischen oder situativen Strukturen unterworfen wird.
Aus der Sicht der allgemeinbildenden Schule ist es wichtig zu sehen, daß die Ergebnisse des zweiten Standpunktes (eventuell eine Theorie) nicht Endprodukt sein müssen, mit denen nicht mehr weitergearbeitet wird. Vielmehr sollte nach inner- und außermathematischen Anwendungen gesucht werden.

(3) Anwendung

Die in (2) entwickelten Begriffe können auf verschiedene Arten angewendet werden:

a) Zunächst kann man mit einem entwickelten potentiellen Modell auf die Suche nach Problemsituationen gehen, denen man die entwickelten "mathematischen Formen aufprägt" (FREY, 1967, S. 149), somit mathematisiert und mit einem in (2) eventuell entwickelten Kalkül manipulierbar macht. Das mathematische Modell wird hier festgehalten und eine Schar von Situationen aus dem Blickwinkel des vorgegebenen Modells untersucht.

   Beispiel: Die Suche nach Phänomenen, die in Strukturverwandtschaft zu den Auslaufvorgängen stehen. (BECK, BÜTTNER, KUNTZSCH, 1977b).

Der von FREY gewählte Ausdruck "Aufprägung" wird besonders dann verständlich, wenn man sich beim Mathematisieren nicht unbedingt von "etwaigen oder vermeintlichen Eigengesetzmäßigkeiten" der Situation leiten läßt (D.W. MÜLLER, 1974), sondern diese ignorieren kann.

Beispiel: Bei den Auslaufvorgängen wurde die augenscheinliche Kontinuität des Vorgangs beim Gebrauch der Differenzengleichungen ignoriert und diskretisiert. Die Situation wird hier in eine auf den ersten Blick ihr wesensfremde Beschreibungsform gefaßt.

b) Der Ausgangspunkt der Überlegungen kann in Umkehrung zu a) eine vorgegebene Problemsituation sein. Von ihr aus wird das zur Verfügung stehende mathematische Arsenal - ein Arsenal potentieller Modelle - abgesucht, ob sich darunter ein zur Beschreibung geeignetes Modell findet.

Ich schließe den Abschnitt mit einigen ergänzenden Bemerkungen zur Dynamik der Standpunkte (1), (2) und (3).
Die "Verweildauer" auf einem Standpunkt kann unterschiedlich sein. Sie wird von der Art des Problems, dem Entwicklungsstand und der Interessenlage des Schülers abhängen. Werden die drei Standpunkte innerhalb einer Unterrichtseinheit eingenommen, so soll sie "ausgewogen im Kleinen" heißen.
Das Skiliftbeispiel und mit Einschränkung die Auslaufvorgänge stellen hierfür Beispiele dar. Meines Erachtens sind derartige Beispiele besonders gut geeignet, um mit Schülern über die Entstehung von Mathematik und die Beziehungen zu anderen Fächern zu sprechen, da der Schüler sich nach wenigen Stunden noch an Einzelheiten der Unterrichtseinheit erinnert. Vermutlich wird der Schüler erst dann von der Möglichkeit zur Einnahme der Standpunkte voll überzeugt, wenn ihm diese Standpunkte auch an der Geschichte der Mathematik erklärt werden, und nicht nur als Phänomen des Unterrichts begegnen.
Die Einnahme der drei Standpunkte ist nicht nur bei einzelnen Forschern zu beobachten, vielmehr gibt es Epochen, in denen der Standpunkt 1 bevorzugt wurde, während in den folgenden Epochen der Standpunkt 2 dominierte.

Für den Unterricht selber ist die Beachtung der drei Standpunkte ein ausgezeichnetes Mittel, den Unterricht vor Einseitigkeiten zu schützen, was das Verhältnis von Reiner Mathematik und Anwendungen betrifft.

Mit der hier besprochenen Reihenfolge der Standpunkte soll nicht gesagt sein, daß beim Mathematiktreiben nur diese Reihenfolge möglich ist; vielmehr können die Standpunkte in unterschiedlicher Reihenfolge eingenommen werden.

- Der Standpunkt (3) b kann eingenommen werden, ohne daß irgend eine der übrigen Aktivitäten (1) - (3) a angeschlossen werden muß. Er kann vollkommen isoliert stehen, wenn zu einer vorgegebenen Problemsituation unmittelbar ein passendes Modell gefunden wird. Ich möchte diesen Fall, wo kein theoretisches mathematisches Interesse und keine Konstruktion von Instrumenten erfolgt, den Fall der "reinen Anwendung" nennen. Er paßt sicher zur Grundauffassung von Mathematik als Hilfswissenschaft.
  Vom Standpunkt (3) b aus kann man in den Kreislauf der Standpunkte einsteigen, wenn entweder zur Problemsituation kein passendes Modell gefunden wird und somit die Aktivität (1) aufgenommen werden muß, oder daß das verwendete mathematische Modell zur weiteren mathematischen Untersuchung reizt, so daß (2) eingenommen wird.

- Der Standpunkt (1) kann unmittelbar in (3) übergehen, wenn ein entwickeltes Instrument direkt auf weitere Probleme angewendet werden kann.
  Beispiel: Die unmittelbare Anwendung der Differenzengleichungen bei ähnlichen Problemen in den Naturwissenschaften.

- Bei der Aktivität (2) können Probleme auftauchen, die mit den verfügbaren Mitteln nicht mehr adäquat behandelt werden können und die Schaffung neuer Mittel erfordern.
  Aktivität (2) geht dann nahtlos in (1) über. Die neuen Mittel können wieder einer Untersuchung gemäß (2) unterworfen werden usw..

2. Modellbilden im Unterricht

Im vorausgegangenen Abschnitt wurden an drei Standpunkten des Mathematisierens Arbeitsweisen in und mit der Mathematik beschrieben, die geeignet sind, ganze Kurse oder Unterrichtseinheiten zu strukturieren. Im folgenden soll eine Position bezogen werden, von der aus detaillierte konstruktive Anleitungen für einen anwendungsorientierten Mathematikunterricht bis hin zur einzelnen Unterrichtsstunde möglich sind.
Diese Anleitungen beziehen sich auf die Verfolgung von einzelnen wesentlichen Ideen, wie sie sich aus der Betrachtung der vielfältigen Aspekte des Modellbildens ergeben.
Eine durch den ganzen Abschnitt 2 gehende Idee ist die prinzipielle Trennung zwischen Situations- und Modellebene. Damit verbunden ist die Einsicht, daß die mathematischen Ergebnisse immer nur Erkenntnisse über das Modell selbst und nicht ohne weiteres über die ursprüngliche Situation sind.
Die Verfolgung von Einzelaspekten beim Modellbilden kann nicht in einem theoretischen Kurs über Modellbilden erfolgen, vielmehr muß dem Schüler während seiner gesamten Schulzeit die Möglichkeit gegeben werden, an typischen Beispielen implizite Erfahrungen zum Modellbilden zu sammeln. Im Anschluß daran sollten einzelne Aspekte bewußt gemacht werden.
Dies soll dem Spiralprinzip entsprechend von der Grundschule bis hin zur Sekundarstufe II geschehen und wesentliche mathematische Gebiete erfassen wie Arithmetik, Geometrie, Analysis, Stochastik.

Zur Illustration der im folgenden gegebenen Anleitungen benötigen wir ein umfangreiches Beispielmaterial. Um die Darstellung nicht ausufern zu lassen, konzentriere ich mich darauf, Beispielsituationen gelegentlich verkürzt als Textaufgabe vorzustellen, eine Frage aus der Situation zu isolieren und mögliche Modelle anzugeben. Auf eine weitergehende Ausbeutung der Situation in Form einer Problemsequenz wird verzichtet. Anstelle dessen werden die im Hinblick auf das

Modellbilden interessanten Teilaspekte angesprochen.

2.1 Verschiedene Situationen - ein Modell

Im Anschluß an 1.3 möchte ich mich nun mit den Phänomen beschäftigen, daß die Mathematisierung verschiedener Situationen auf das gleiche mathematische Modell führen bzw. ein mathematisches Modell verschiedene situative Interpretationen zulassen kann.

In der Didaktik wird dieses Phänomen gelegentlich thematisiert. KARASCHEWSKI (1966, S. 140) formuliert im Zusammenhang mit der Behandlung der Grundrechenarten, die sich in verschiedenen Situationen zu bewähren haben, das Prinzip der Realvariation. Wesentliches Merkmal ist,daß "auf dem Wege der Realvariation zusammengrbracht werden kann, was in Wirklichkeit weit auseinanderliegt." Häufig machen Schulbuchautoren implizit von der situativen Mehrdeutigkeit mathematischer Modelle Gebrauch, wenn sie in den Schulbüchern - insbesondere der Grundschule und Sekundarstufe I - sogenannte "Aufgabenfamilien" anbieten. Es handelt sich hierbei überwiegend um Textaufgaben zu verschiedenen mehr oder weniger realistischen Umweltsituationen, die durch dieselbe Folge arithmetischer Operationen gelöst werden können und somit dieselbe mathematische Modellierung gestatten. Die Intention, die mit derartigen Aufgaben verbunden waren, lagen oft nicht so sehr auf der Förderung der Fähigkeiten zur Mathematisierung, sondern eher auf dem Einüben arithmetischer Fertigkeiten. Gelegentlich werden derartige "Aufgabenfamilien" deswegen kritisiert, weil sie eine gedankliche Durchdringung der Situation nicht erfordern. Die maßvolle und bewußte Behandlung von "Aufgaben - familien" hat jedoch über die Einübung bestimmter mathematischer Fertigkeiten hinaus ihre Bedeutung, und dies in zweierlei Hinsicht.

1) Zunächst zeigt sich deutlich der Ökonomieeffekt, den die Beherrschung eines Kalküls oder gar einer mathematischen Theo-

rie, mit sich bringen kann, falls sie allgemein genug angelegt, in den Bezeichnungsweisen nicht überspezialisiert und nicht nur auf spezielle reale Kontexte bezogen ist. Dies bewußt zu machen, scheint mir eine besondere Aufgabe der allgemeinbildenden Schulen zu sein. Es sollten u.a. mathematische Gebiete behandelt werden, die einerseits einen breiten Anwendungsbereich haben, andererseits soll entsprechendes Wissen anwendungsbereit angelegt werden. Es spiegelt sich hier z. T. die Idee wieder, die die Mathematik als Wissenschaft von der Anlage potentieller Modelle sieht.

2) Die wesentliche Trennung von Realität und Modell soll mit dem Schüler anhand der nachfolgenden Beispiele thematisiert werden. Gerade auch an Beispielen, bei denen eine kanonische Zuordnung von Modell und Situation besteht, ihre Identifizierung besonders naheliegend ist und somit die Diskriminierung besonders schwerfällt.

Bei der Behandlung von "Aufgabenfamilien" muß das Ziel der Förderung der Mathematisierungsfähigkeit nicht auf der Strecke bleiben, sondern es kann durch verschiedene Maßnahmen angeregt werden: Variation der Komplexität von Situationen; verschiedenartige Präsentationen der Situationen; Ermunterung zur Erfindung von "Rechengeschichten", bei denen das eigentätige Aufsuchen von Situationen, zu denen ein bestimmtes mathematisches Modell paßt, im Vordergrund steht.

Ich möchte nun einige "Aufgabenfamilien" zusammenstellen, welche die vorgeschlagenen Maßnahmen konkretisieren sowie Hinweise geben, wie dem Schüler die Offenheit eines mathematischen Modells gegenüber verschiedenen Interpretationen bewußt gemacht werden kann. Gerade zu letzterem Aspekt lassen sich aus der didaktischen Literatur kaum Hinweise entnehmen.

Beispiel 1 (1./2. Schuljahr)

Die Explizierung von Einzelaspekten des Modellbildens erweist sich in der Grundschule als besonders schwieriges Thema, zu dem einige sporadische Erfahrungen vorliegen. Begriffe wie Modell, Situationsebene, Realität usw. sind einem Unterrichtsgespräch in der Primarstufe unangemessen. Vielmehr müssen diese Begriffe implizit verwendet werden. Beispielsweise wird im folgenden Beispiel der den Kindern geläufige Begriff des Rechenbaums anstelle des Begriffes Modell verwendet.

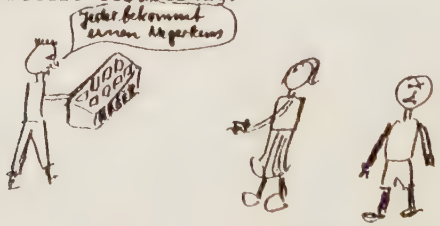
Der Lehrer präsentiert drei Situationen:

a) Frau Krämer kauft ein.

b) 8 Maurer kommen in einem VW-Bus von der Baustelle. 3 Maurer steigen vor einem Bäckerladen aus.

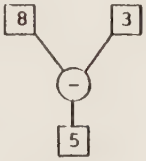
c) Auf Peters Geburtstag:

(i)



(ii) Peter verteilt noch einmal Negerküsse.

Die Aufgaben und die Lösungen werden an der (Flügel-) Tafel nebeneinandergestellt. Hilfreich zur Darstellung der Lösungen ist die ikonisierte Form in einem Simplexdiagramm (Rechenbaum), das für die drei Aufgaben gleich aussieht.



Der Lehrer fordert die Schüler auf, die Aufgaben zu vergleichen. Mögliche Antworten: "Man muß im Kaufladen genauso rechnen wie Peter."; "Es sind immer dieselben Rechenbäume."

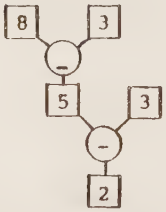
Zu diesem Modell sollen nun weitere passende Situationen gesucht werden, wobei die Daten variiert werden können. ("Erfindet Aufgaben, wo man genauso rechnet.") Z.B.: Eine Ente hat 9 Küken. 2 schwimmen weg.

Schließlich werden aus einer Sammlung von bearbeiteten Beispielen die "Schlüsselworte" zusammengestellt, die für die Subtraktionsaufgaben "verantwortlich" waren. (" An welchen Worten seht ihr, daß man eine Subtraktionsaufgabe hat?") Die Schüler suchen die Verben sinken, entfernen, vermindern, abziehen, aussteigen, weglaufen, erniedrigen, verkleinern, verkürzen, verschenken, abschneiden usw. heraus. [1)]

---

1) Anmerkung: Die Wortliste darf keinem Reiz-Reaktionsmechanismus unterliegen. Je nach dem situativen Zusammenhang der Daten ist auch die Addition die angemessene Operation .

Abschließend wird Aufgabe (c ii) behandelt. Der ursprüngliche Rechenbaum fortgesetzt



und die Aufgaben a), b) werden wieder aufgenommen.
("Erzählt die Geschichten aus dem Kaufladen und mit den Maurern weiter, so daß ihr den gleichen Rechenbaum erhaltet.")

Beispiel 2 (Sekundarstufe I)

a) In Kapitel IV, 2 ist eine offene Situation näher ausgeführt: Den Schülern wird ein Prospekt über ein Skigebiet ausgehändigt, der folgende Fragen anregt:
   (i) Kann ein Skiläufer seinen 40-Punkteblock am Schaffürglilift und Ziegenhüttlilift vollständig verfahren?
   (ii) Wie muß er seine Fahrten einrichten, damit er möglichst viele Höhenmeter geschleppt wird?

   Bei der Lösung der Aufgabe kommen vor allem die ggT-Bildung und das Ausfüllen von Tabellen zur Anwendung.

b) Folgende Aufgabe in einer vollständig anderen Situation erfordert dieselben Aktivitäten.
   " Ein Spediteur soll ein Lager mit 108 (107, 45) Kisten ausräumen. Er hat zwei Lastwagentypen. Der eine kann 11 Kisten, der andere 8 Kisten laden.

(i) Kann der Abtransport so organisiert werden, daß die Lastwagen vollbeladen sind?

(ii) Wie wird der Abtransport organisiert, damit möglichst wenig Transportkosten entstehen. Eine Fahrt mit dem großen LKW kostet 47,-- DM, eine mit dem kleinen LKW 40,-- DM."

c) Schließlich werden die Schüler mit einer offenen Situation konfrontiert: Dem Schüler liegt ein Prospekt über Einbauküchen vor, das u.a. die Maße der Einbauteile enthält (z. B. die Breiten 30 cm, 50 cm, 60 cm, 90 cm). Sinnvolle Fragen sind vom Schüler selbst zu stellen.

(i) Kannst du die häusliche Küche mit dem Küchenprogramm ausstellen?

(ii) Warum wählt der Hersteller diese Maße?

(iii) Welche Wandlängen können mit dem Programm ausgestellt werden? (Bei dieser Betrachtung sind vorläufig die Längen 60 und 90 cm als Vielfache von 30 cm unwichtig.)

Eine Gegenüberstellung der verwendeten Tabellen macht den gemeinsamen mathematischen Hintergrund deutlich.

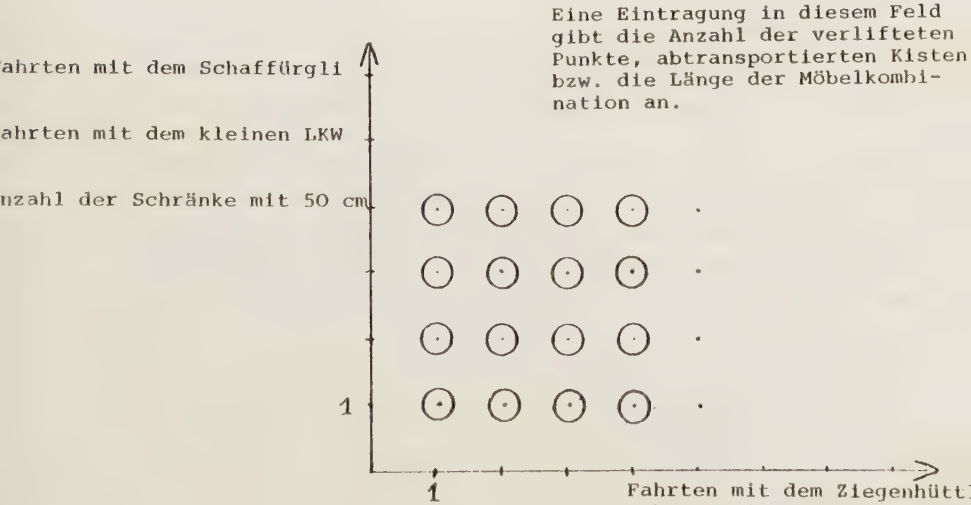


Abb. 4 Verwendung einer Tabelle in verschiedenen Situationen

Die Aufgaben a) und b) können weiterführend behandelt werden. Zur Ermittlung der günstigsten Schlepphöhe/Transportkosten werden die zu einer Fahrtenkombination gehörigen Höhenmeter/Transportkosten in eine zweite Tabelle eingetragen und der maximale/minimale Wert aus den zulässigen Lösungen aussortiert.

Die Algebraisierung, des in der Abb. 4 herausgestellten Zusammenhangs, läßt den gemeinsamen mathematischen Hintergrund noch deutlicher hervortreten.

a (i): $P = 5a + 3b$
b (i): $P = 11a + 8b$
c (iii): $P = 30a + 50b$

Insbesondere die tabellarische Gegenüberstellung, der in der mathematischen Sprache verwendeten Symbole und entsprechenden Bezeichnungsweisen aus der Situationssprache verdeutlichen die Trennung von beiden Bereichen.
P hat die Bedeutung Anzahl der Punkte, Anzahl der Kisten, Länge der Küche.
a und b sind die Anzahlen der entsprechenden Liftkarten, Lastwagen, Küchenteile.

Beispiel 3 (7./8. Schuljahr)

In ähnlichem mathematischen Zusammenhang wie die vorigen Aufgaben stehen folgende.
Im 7./8. Schuljahr wird gelegentlich als "schwierige" Anwendung der Proportionalität eine Röhrenaufgabe [1] folgenden Typs behandelt:

---

[1] Diese Röhrenaufgaben bekommen im Zusammenhang mit Mischungsaufgaben einen realen Hintergrund.

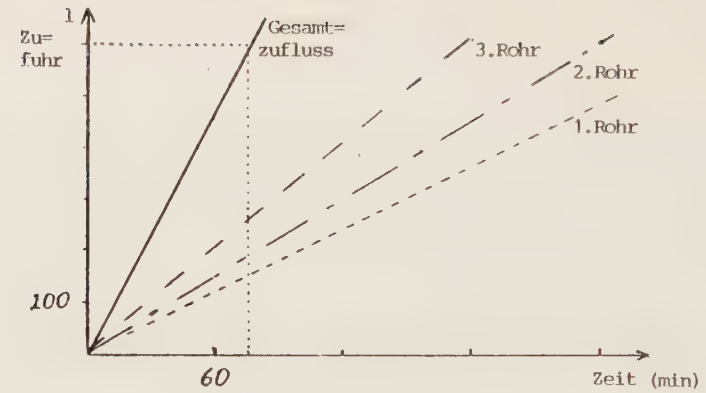
a) Ein Zuflußrohr füllt einen Behälter mit 1200 l in 4 Stunden, ein zweites in 3 Stunden und ein drittes in 5 Stunden. Wie lange brauchen die drei Röhren, wenn sie zusammen eingeschaltet sind?

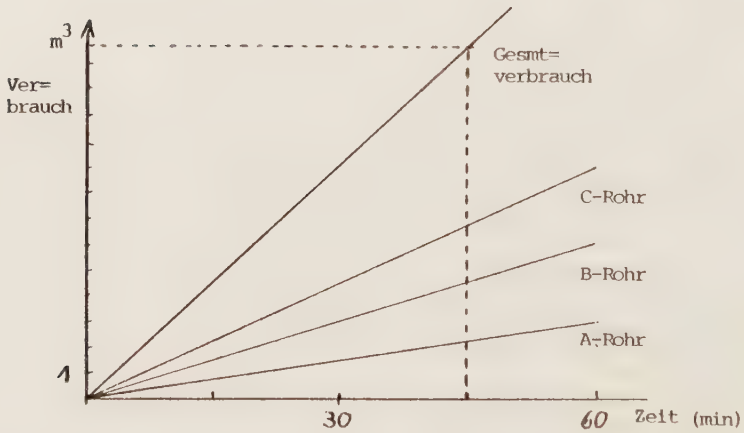
Eine Variante stellt folgende Situation dar. Sie ist realitätsnah, offen gestellt und erfordert die Beschaffung relevanter Daten:

b) An einem Tankwagen der Feuerwehr, der 13,7 m^3 Wasser faßt, können gleichzeitig ein A-Rohr, ein B-Rohr und ein C-Rohr angeschlossen werden.

c) Eine Produktionsaufgabe: Ein Hersteller von Zylinderkopfdichtungen hat zunächst zwei Pressen laufen. Die erste Presse benötigt für 100 Stück 145 Minuten, die zweite Presse braucht für 100 Stück 160 Minuten. Der Hersteller ist Verpflichtungen für eine Tagesproduktion von 9000 Dichtungen eingegangen. Kann er diese in einem Arbeitstag mit 8 Stunden erfüllen, wenn eine neue Presse mit einem Ausstoß von 100 Stück in 120 Minuten angeschafft wird?
(Variation der Fragestellung: Welchen Ausstoß muß die dritte Presse mindestens haben, damit in einem 8-Stundentag 900 Dichtungen produziert werden?)

Die Explizierung des gemeinsamen mathematischen Hintergrunds kann auf 2 Ebenen erfolgen:
Zunächst können die Probleme graphisch gelöst werden, indem eine a) Gesamtzufuhrgerade b) Gesamtverbrauchsgerade c) Gesamtproduktionsgerade durch Geradenaddition ermittelt wird und die gesuchte Zeit abgelesen wird.





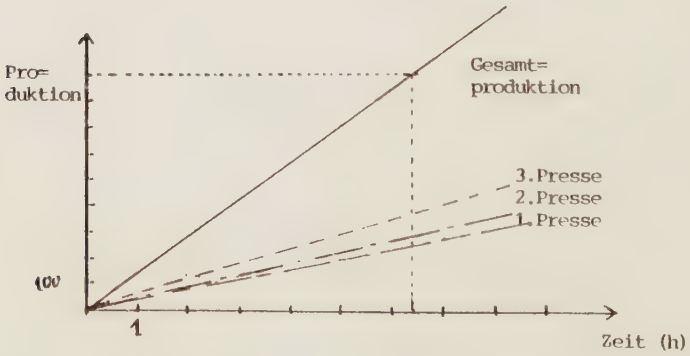


Abb.5 Geradenaddition als Lösungsstrategie in verschiedenen Situationen

Die Algebraisierung der Probleme führt auf eine Bestimmungsgleichung für die gesuchte Zeit und verdeutlicht nochmals den gemeinsamen mathematischen Ansatz

a) $\frac{1200}{4} x + \frac{1200}{3} x + \frac{1200}{5} x = 1200$

b) $3 x + 6 x + 12 x = 13.7$

c) $\frac{100}{145} x + \frac{100}{160} x + \frac{100}{100} x = 900$

Die Koeffizienten stellen in den drei Aufgaben den zustreffenden Verbrauch bzw. die Produktion pro Zeiteinheit dar.

Beispiel 4 (Sekundarstufe I)

Traditionell nimmt die Verwendung von Formeln und Verfahren, wie die Dreisatzrechnung oder Verhältnisgleichungen, die auf der Proportionalität aufbauen, im Unterricht einen breiten Raum ein, wie beispielsweise in der Prozentrechnung.

a) Textaufgabe: Beim Mahlen von Roggen erhält man 78% des Roggengewichts als Mehl. Eine Mühle geht einen Liefervertrag ein, in dem sie sich verpflichtet, monatlich 102 Tonnen Mehl an eine Handelsgesellschaft zu liefern.
b) Präsentation einer Situation: Der Lehrer übergibt den Schülern die Zeitungsannonce eines Kaufhauses über der in großen Buchstaben steht:
"Elektrogeräte um 22% reduziert." Weiter sind verschiedene Geräte abgebildet; z.B. eine Waschmaschine mit der Unterschrift: "Sie sparen 88.- DM."

Beide Aufgaben gehören zum gleichen Aufgabentyp und können mit dem gleichen Lösungsverfahren bearbeitet werden. Im Unterricht wird dies vielfach dadurch herausgearbeitet, daß zu

jeder Aufgabe der Prozentsatz (a) 78% / b) 22%) der Prozentwert (a) 102 Tonnen / b) 88.- DM) und der gesuchte Grundwert (a) Roggengewicht /b) ursprünglicher Preis) angeschrieben werden muß.
Über diese traditionellen Maßnahmen hinaus, sind weitere Maßnahmen möglich, die dem Schüler die Trennung von Situation und Modell vor Augen führen.
Dies könnte im Rückblick über einige Aufgaben oder Situationen geschehen, wobei eine prägnante Sprechweise angestrebt werden kann. ("Was in der Mathematik der Grundwert ist, entspricht beim Müller der anzuliefernde Roggen und beim Kaufhaus der ursprüngliche Preis.") Dadurch wird der Sprache der Mathematik die Sprache der Umwelt gegenübergestellt und die Ökonomisierung durch die einheitliche mathematische Sprechweise verdeutlicht.

Beispiel 5 (Sekundarstufe II)

Im naturwissenschaftlichen Unterricht spielt die Exponentialfunktion der Form

(1) $y = a\, e^{\alpha x}$

eine besondere Rolle, da sie eine Vielfalt von Phänomenen beschreibt. Je ein Experiment, das sich für den Mathematik-, Physik-, Chemie- und Biologieunterricht eignet, wird im folgenden angeführt.

a) Auslaufvorgang aus einem zylindrischen Wasserbehälter mit kapillarer Ausflußöffnung: Die Entwicklung des Wasserstandes h in Abhängigkeit von der Zeit t wird durch die Funktion

(2) $h(t) = h_0 e^{-\alpha t}$

beschrieben, wobei h_0 der anfängliche Wasserstand ist und α die "Auslaufgröße", die vom Durchmesser eines Zylinders und den Abmessungen der Kapillaren abhängt. (HUTH, 1976).

b) Monochromatische Strahlen (Licht, Röntgenstrahlen) werden beim Durchgang durch Materie geschwächt. Die Intensität J ist

(3) $J(s) = J_o e^{-\mu s}$

wobei J_o die Anfangsintensität und μ der Absorptionskoeffizient ist, der von der Art der Strahlung und der durchstrahlten Materie abhängt. (GERTHSEN, 1964).

c) Die Kinetik einer chemischen Reaktion vom Typ $A \xrightarrow{k} B$ wird durch die Funktion

(4) $[A]_t = [A]_o e^{-kt}$ bzw. $[B]_t = [A]_o (1-e^{-kt})$

beschrieben. Wobei $[A]_o$ die Konzentration des Stoffes A zu Beginn der Reaktion ist und k die Geschwindigkeitskonstante ist. (SCHMIDT, 1976).

d) In einer Anfangsphase entwickelt sich eine Bakterienpopulation in einer Nährlösung exponentiell.

(5) $a(t) = a_o e^{bt}$

wobei der Wachstumskoeffizient b durch die Bedingungen des Experiments wie Temperatur, Art der Nährlösung, Art der Bakterien bestimmt ist.

Weitere Phänomene sind in großer Zahl bekannt: z.B. Aufladen eines Kondensators, Amplitude einer gedämpften Schwingung, Luftdruck in Abhängigkeit von der Meereshöhe, Genfrequenz unter Mutationsdruck usw.

In den Naturwissenschaften werden i.A. zwei Wege beschritten um zu obigen Funktionen zu kommen:

(i) Integration einer Dgl. vom Typ $\frac{dy}{dx} = \alpha x$

(ii) Auswerten einer Meßwertreihe: Werden die Meßwerte in logarithmisches Papier eingetragen, so müssen sie auf einer Geraden liegen.

Eine Aufgabe des Mathematikunterrichs besteht darin, das Wissen über Exponentialfunktionen modellfähig bzw. anwendungsbereit anzulegen. Dazu könnten folgende Maßnahmen beitragen:

- Verwendung verschiedener Schreibweisen:
  Im Mathematikunterricht wird folgende Notation bevorzugt:

  $$x \longmapsto y_o \, e^{\alpha x}$$

  während in der Naturwissenschaft überwiegend die Schreibweise für Funktionsgleichungen

  $$y\,(x) = y_o \, e^{\alpha x}$$

  angewendet wird. Dies ist auch sinnvoll, da die Funktionsgleichung das natürliche Endprodukt bei der Lösung der entsprechenden Dgl. ist.

- Verwendung verschiedener Symbole wie in (1) - (5)

- Einführung der Exponentialfunktion aus einer Anwendungssituation heraus.

- Behandlung typischer "Eigenschaften" wie Halbwertzeit, Linearisierung durch Logarithmen, Proportionalität der Änderungsrate usw..

Der Zusammenhang der Beispiele kann in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt werden.

Beispiel	a)	b)	c)	d)	formal
Funktion	$h(t)=h_0\, e^{-\alpha t}$	$J(t)=J_0\, e^{-\mu t}$	$[A]_t=[A]_0\, e^{-kt}$	$a(t)=a_0\, e^{bt}$	$x \longmapsto x_0\, e^{\alpha x}$ $y(x)=x_0\, e^{\alpha x}$
abhängige Variable	Wasserstands= höhe h	Intensität J	Konzentration des Stoffes A	Anzahl der Bak= terien pro Probe a	y
unabhängige Variable	Zeit t	Weg s in der Materie	Zeit t	Zeit t	x
Anfangswert	anfänglicher Wasserstand h_0	Anfangsintensität J_0	Anfangskonzen= tration $[A]_0$	anfängliche An= zahl pro Probe a_0	x_0
Wachstum= koeffizient	Ausflussgröße α	Absorptionskoeffi= zient μ	Geschwindigkeits= konstante k	Wachstums = koeffizient b	α

2.2 verschiedene Modelle für das gleiche Problem

Im vorausgegangenen Abschnitt wurden unterschiedliche Situationen zusammengestellt, die mit demselben Modell beschrieben bzw. denen dieselbe mathematische Idee zugrunde gelegt wurde. Umgekehrt gibt es viele Beispiele dafür, daß eine Situation verschiedene Modellierungen gestattet.

Mit dem zuletzt genannten Phänomen möchte ich mich im folgenden im Sinne einer praktischen Unterrichtslehre befassen. Von dieser Position aus ist es wichtig zwei Fälle zu unterscheiden. Einerseits gilt es, Modelle einer Situation zu betrachten, die strukturell verschieden sind, gleichwohl wichtige Züge der Situation erfassen. Besonders deutlich tritt dies bei der Gegenüberstellung deterministischer und stochastischer Modelle hervor. Zum anderen werden auch Situationen betrachtet, denen dieselbe Modellvorstellung zugrunde gelegt wird, jedoch verschiedene Darstellungsformen für das Modell bzw. für die Modellidee verwendet wird.

Mögliche Gründe für einen Modellwechsel werden bei jedem Beispiel angegeben.

Beispiel 6: Gestaltung eines Parkplatzes (Grungschule-Sekundarstufe I)

Das Beispiel wird in Anlehnung an eine Idee von HOPE/ROTHERY (1975) entwickelt.

Konfrontation mit der Situation: Der Lehrer stellt die Notwendigkeit heraus, beim Bau eines kleinen Kaufhauses die Anlage eines Parkplatzes auf einem benachbarten Grundstück mitzuplanen.

Material: Kopien eines Lageplanes vom Grundstück für den Schüler; Flanelltafel für den Lehrer; aus Pappe ausgeschnittene Stellplätze, die auf den Lageplan gelegt werden können.

a) Physikalisch-geometrisches Modell: Verschiedene Anordnungen der Stellplätze sind möglich.

(i)

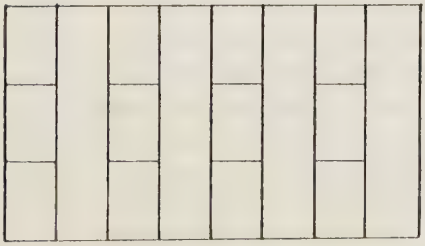
24 Stellplätze

Gelingt eine vollständige Auslegung des Grundstücks mit mit Plättchen, so ergibt sich die maximale Anzahl von Stellplätzen, die auf dem Parkplatz untergebracht werden können. (Ein derartiges Parksystem wird oft auf ameri= kanischen Firmenparkplätzen praktiziert.) Für einen Kaufhaus-Parkplatz ist das System (i) ungeeignet. Jeder Stellplatz muß unabhängig von den anderen erreichbar sein.

(ii)

16 Stellplätze

(iii)



12 Stellplätze

(iv)

15 Stellplätze

Die Anordnung (ii) und (iv) sind fast gleichgünstig. Findet auf dem Gelände eine neunte Spalte Platz, so sind (ii) und (iv) gleichwertig. Sie sind immer gleichwertig, wenn die Anzahl der Spalten (bei drei Zeilen) durch 3 teilbar ist, da dann auf je zwei Stellplätze ein Zufahrtsplatz kommt.
Wie ist es, wenn vier,fünf,... Reihen auf dem Parkplatz untergebracht werden können? Die Frage kann wieder durch Experimentieren mit Plättchen beantwortet werden, legt jedoch die Suche nach einer Formel nahe.

b) Algebraisches Modell: Die folgenden Formeln sind Algebraisierungen der geometrischen Verhältnisse in (i)-(iv). Eine erste Näherung wäre, die Anzahl der Stellplätze als Quotient von Parkplatzfläche und Stellplatzfläche zu berechnen. Dabei sind die Zufahrtswege nicht berücksichtigt und ebensowenig, daß ein Auto auf einem schmalen ungenutzten Rand nicht "verteilt" werden kann.

(i) Eine kleine Verbesserung bringt die Formel

$$N = N_B \cdot N_L$$

wobei N_B die Anzahl der Breiteneinheiten ist und N_L die Anzahl der Längeneinheiten, die auf dem Grundstück untergebracht werden können. Realistischer sind die Formeln für Typ (ii) - (iv), da die Zufahrtswege berücksichtigt werden.

(ii) $N = N_B \text{ int } \left(\frac{2 \cdot N_L}{3}\right)$

(iii) $N = N_L \text{ int } \left(\frac{N_B + 1}{2}\right)$

(iv) $N = N_L \text{ int } \left(\frac{2N_B}{3}\right)$

Die Formeln (ii) und (iv) sind symmetrisch in N_L und N_B. Sie liefern gleichwertige Ausnutzungen der Parkfläche, wenn N_L bzw. N_B Dreierzahlen sind. Das wird auch aus den Zeichnungen deutlich. Auf zwei Stellplätzen kommt eine Zufahrtslücke. Die Anordnung (iii) ist dagegen ungünstiger, da auf einem Stellplatz eine Zufahrtslücke kommt. (abgesehen von den Fällen am Rand des Parkplatzes.)

c) Geometrisch-symbolisches Modell: Ein drittes Modell ist die Bauzeichnung, in der die Entscheidungen für eine bestimmte Parkplatzaufteilung ihren Niederschlag finden, die aus der Manipulation der Modelle a) bzw. b) gewonnen werden.

Gründe für den Modellwechsel: Modell a) eignet sich für den Einsatz in der Grundschule und der Diskussion von wenigen konkreten Fällen. Jedoch werden allgemeine Ideen schon erkennbar: 2 Parkplätze pro eine Anfahrtslücke. Der Übergang zu b) kann auf der SI vollzogen werden und ist aus dem Streben nach allgemein gültigen Aussagen motiviert. b) ist vor allem flexibler einsetzbar bei der Variation der Stellplatzgröße, die in einer gewissen Bandbreite geändert werden kann. Modell a) und b) dienen dem Erkenntnisgewinn. Der Übergang von (i) zu (ii), (iii) und (iv) erfolgt durch operative Eingriffe in die Anordnungsformeln (umlegen, weg-hinzulegen). Der Übergang zu c) erfolgt in der Realität, u.a. aus Kommunikationsgründen (Management, Architekt-Handwerker); c) ist eine anschauliche Fixierung der Erkenntnisse aus a) bzw. b). Anmerkung: Die Entwicklung der Anordnungsformen verdeutlicht, daß Modellbilden hier als Annäherungsprozess an eine bestimmte Zielvorstellung zu sehen ist.

Beispiel 7: Polulationsdynamik (6./7. Schuljahr)

Das Beispiel ist in Kap. IV, 3 in modifizierter Form dargestellt. Drei verschiedene Modellformen werden zur Beschreibung der Entwicklung einer Käferpopulation verwendet.

a) Flußgraph

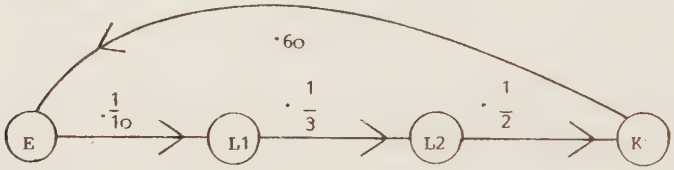


Abb 7 Flussgraph zur Entwicklung einer Maikaeferpopulation (E Eier, L1 einjährige Larven, L2 zweijährige Larven, K Kaefer)

b) Iterierte Anwendung des Operators T liefert eine Tabelle.

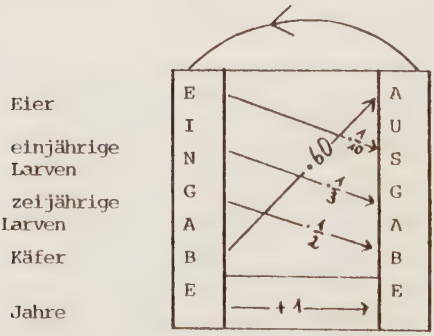


Abb.8 Berechnung der Populationsentwicklung mit einem "Operatorplättchen"

c) Graphische Darstellung der Populationsentwicklung.

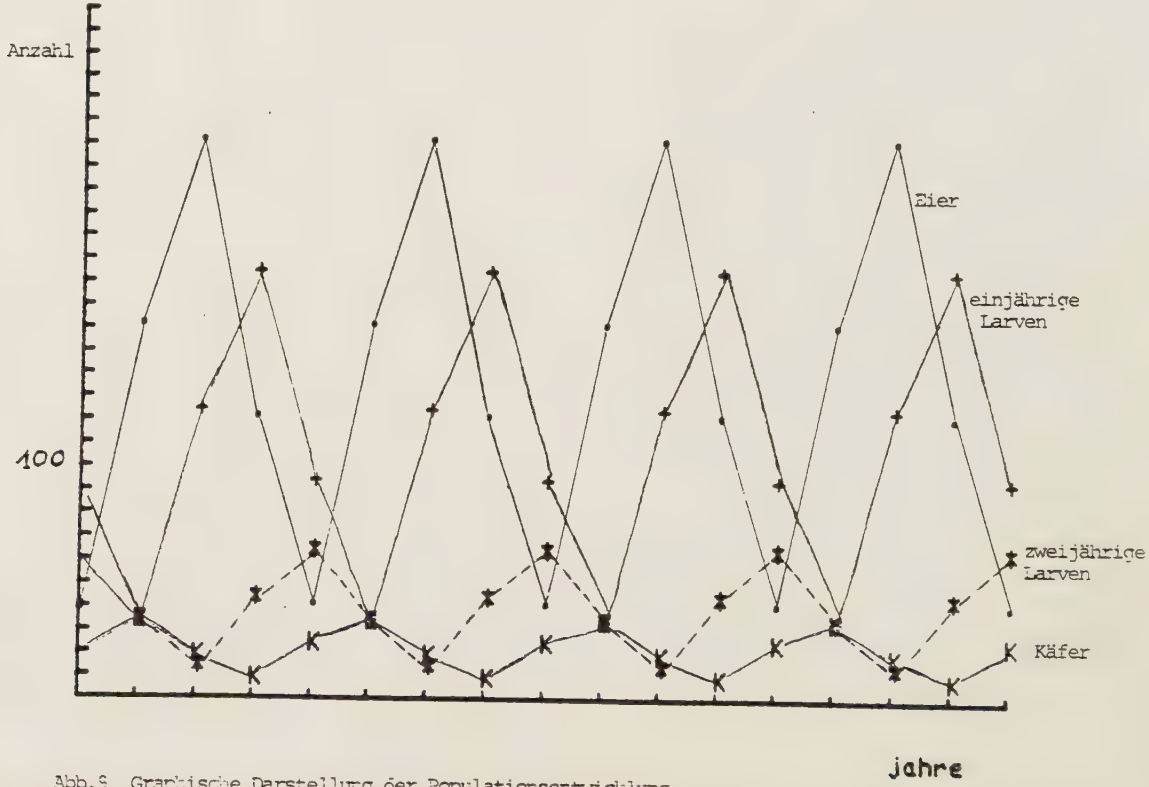


Abb.9 Graphische Darstellung der Populationsentwicklung

Gründe für den Wechsel der Darstellungsformen: a) ist eine schematisierte und kompakte Darstellung der Situation, die wichtige Details wie die Morphogenese und die Überlebensraten und Vermehrungsraten erfaßt, sowie einen Eindruck von der Dynamik der Situation gibt. b) dient einer günstigen rechnerischen Auswertung und liefert eine Tabelle. Die Darstellung der Populationswerte in einer Graphik c) dient der Übersichtlichkeit, läßt funktionale Zusammenhänge deutlicher hervortreten und ist für die Analyse der Situation besonders geeignet. Schließlich ermöglicht c) eine Propädeutik zum Thema "Kurvendiskussion". Der Modellwechsel von b) nach c) erklärt sich hier nicht allein aus der Behandlung der Situation, sondern ist mit dem Lernen von Mathematik verbunden. Den Modellen a),b),c) liegt die gleiche Betrachtungsweise der Situation zugrunde. Jedoch wechselt die Darstellungsform von einer ikonisch-symbolischen Form (a und b) zu einer ikonischen (graphischen) Form c). Modell a),b) eignet sich besser zur quantitativen Beschreibung während bei c) qualitative Fragen im Vordergrund stehen.

Anmerkung: Schüler einer 7. Gymnasialklasse, mit denen das Beispiel innerhalb eines Schulversuchs zum computerorientierten Mathematikunterricht bearbeitet wurde, sind sich der Vorteile verschiedener Darstellungsformen bewußt: "In der Zeichnung (gemeint c)) sehe ich schneller wie das mit den Eiern, Larven, Käfern auf und abgeht." "In der Tabelle kann ich die Zahlen genauer ablesen."

Beispiel 8: Feldmausplagen (Sekundarstufe II)
Das Beispiel ist in Kap. IV, 3 ausführlich dargestellt. Drei verschiedene Modelle werden verwendet:

a) Die schematische Darstellung der Situation in einem Flußgraph ist ein ikonisch-symbolisches Modell.
b) Die aus a) gewonnenen linearen Transformationen stellen ein diskretes Modell auf symbolischer Ebene dar.
c) Aus b) kann mittels numerischer Methoden ein stetiges

Modell in Form einer Exponentialfunktion gewonnen werden.

Gründe für den Modellwechsel: Der Wechsel von a) nach b) erfolgt, um die Populationsentwicklung günstig quantitativ beschreiben zu können. Beim Übergang zu c) sind mehrere Gründe maßgebend:
1) Zunächst ist ein Modellwechsel sinnvoll, wenn damit eine verbesserte Beschreibung beobachtbarer Phänomene ermöglicht wird. Das diskrete Modell b) beschreibt die Populationsentwicklung in Sprüngen, die im Grenzbereich weit über die in der Natur beobachteten Populationsdichten hinausführen können. Im stetigen Modell c) kann das einfach vermieden werden. Andererseits geht beim Übergang von b) nach c) auch Information verloren. Die Verteilung der Generationen wird nicht erfaßt. 2) Ein häufiger Grund für einen Modellwechsel liegt darin, daß eine Situation unter dem Blickwinkel verschiedener Fragestellungen betrachtet wird. Modell c) eignet sich besonders zur Ermittlung des Schadens, den eine Mäusepopulation verursachen kann, da der Schaden als Integral über die Mäusepopulation interpretiert wird. Das Integral ist in c) einfach zu ermitteln.
Es gibt verschiedene Methoden der Modelltransformation. In dem vorliegenden Fall sind es Methoden der Numerischen Mathematik. Der Populationsverlauf aus b) wird durch c) approximiert. Es handelt sich hierbei um eine rein innermathematische Aktivität, also um innermathematisches Modellbilden, das jedoch durch außermathematische Probleme motiviert wird. In IV, 3 wird der Übergang von b) nach c) aus zwei Weisen vollzogen. Zunächst überwiegt induktives Vorgehen: "Welcher Funktionstyp könnte gut zu dem Datensatz passen?" Später können auf höhrem Niveau die Populationsvektoren nach den Eigenvektoren der Populationsmatrix entwickelt werden.
Es ergibt sich dann eine exponentielle Abhängigkeit der iterierten Populationsvektoren von dem überwiegenden Eigenwert.

Beispiel 9: Kürzester Weg durch Netze (Grundschule - Hochschule)

Konfrontation mit der Situation: Auf Grundschulniveau wird ein kleiner Abschnitt einer Straßenkarte präsentiert. "Peters Vater fährt morgens von Altenkirchen zur Bahnstation. Welchen Weg wird er wohl nehmen?" (Entfernungen müssen der Karte entnommen werden.)
a) physikalisches Modell: Durch Straffen eines maßstabgerecht geknüpften Netzes zeichnet sich der kürzeste Weg aus.
b) ikonisch-symbolisches Modell: Systematisches Probieren (Kombinatorik) an einem bewerteten Graphen liefert den kürzesten Weg.
c) symbolisches Modell: Die Kostenmatrix liefert nach mehrmaligem Potenzieren den Wert für den optimalen Weg. Der Weg selber wird durch den Algorithmus von DANTZIG ermittelt (HENN/KÜNZI, 1968), der eng an der graphischen Darstellung des Netzes operiert. (Ein allgemeines Verfahren zur Lösung ist der Simplexalgorithmus).

Ein Grund für den Modellwechsel von a) nach b) liegt darin, daß a) für umfangreiche Probleme inpraktikabel ist, während c) ein mit dem Computer bearbeitbares Verfahren ist und direkt numerische Werte liefert. Nach der Programmierung müssen nur die zu einer vorliegenden Situatuion gehörenden Parameter spezifiziert werden. In ihrer Allgemeingültigkeit unterscheiden sich beide Modellformen interessanterweise nicht.

Beispiel 10: Entwicklung von Autopopulationen
(Sekundarstufe I/II)

Das Beispiel ist von BOSCH/WITTMANN (1976) entwickelt worden.

Problemsituation: 1975 fand eine lebhafte öffentliche Diskussion statt, ob die Automobilkrise eine Konjunktur- oder Strukturkrise sei. In dieser Diskussion spielen Begriffe wie Ersatzbedarf, durchschnittliche Lebensdauer, durchschnittlicher Autobestand, Neuzulassung usw. eine wesentliche Rolle. BOSCH/WITTMANN stellen den Begriff der Erneuerungsrate in den Mittelpunkt ihrer Überlegungen, der in der Diskussion implizit verwendet wurde:

$$\text{Erneuerungsrate} = \frac{\text{Mittlerer (=durchschnittlicher) Bestand}}{\text{durchschnittliche Lebensdauer}}$$

Die Entwicklung der Autopopulation wird mit verschiedenen Modellen beschrieben.

a) Probabilistisches Modell: Der in diesem Zusammenhang interessierende "Lebensweg" eines Autos wird als stochastischer Prozeß auf den Zuständen S_i,S betrachtet, und kann an einem Flußgraphen verfolgt werden.

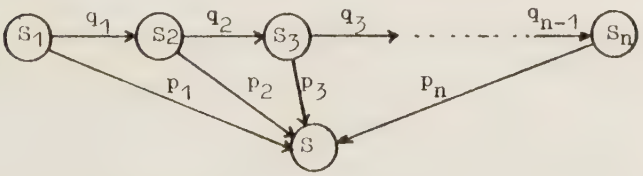


Abb. 10: Flußgrah zur Darstellung der Entwicklung einer Autopopulation

S_i bedeutet: "Auto befindet sich im i-ten Lebenstag."
S bedeutet: "Auto ist aus dem Verkehr gezogen."
q_i ($i = 1, \ldots, n-1$) gibt die Übergangswahrscheinlichkeit an, daß ein Auto, das den i-ten Tag erlebt hat, auch den (i + 1)-ten Tag erlebt. n sei so groß gewählt, daß ein Auto spätestens nach n Tagen aus dem Verkehr gezogen wird. Die in dem Flußdiagramm dargestellten Verhältnisse legen nun auf algebraischer Ebene die Anwendung des Kalküls der Stochastik nahe.

In die folgende Rechnung geht die Annahme ein, daß der Bestand an Autos stationär gehalten werden soll. Somit befinden sich täglich durchschnittlich r Autos im Zustand S_1.

Die Anzahlen der Autos in den Zuständen S_i sind stochastische Größen. Bezeichnet man die zugehörigen Zufallsvariablen mit s_i, so ergeben sich die Erwartungswerte $E(x_i)$ iterativ:

$$M_i = E(x_i) = q_{i-1} \cdot E(x_{i-1})$$

mit $M_1 = E(x_1) = r$

und in expliziter Form

$$M_i = q_1 \cdot \ldots \cdot q_{i-1} \cdot r \quad (i=2,\ldots,n)$$

Die erwartete Gesamtzahl M der Autos in den Zuständen $S_1,\ldots,S_n$ ist dann

$$M = r(1+q_1+q_1q_2+\ldots+q_1q_2\ldots q_{n-1})$$

und der Erwartungswert λ der Lebensdauer ist

$$\lambda = 1 + q_1 + q_1q_2 + \ldots + q_1\ldots q_{n-1}$$

Es ist also $M = \lambda \cdot r$.

b) Stochastische Simulation (Monte-Carlo-Simulation):
Durch den Einsatz von Computern mit Zufallszahlengenerator kann nach Vorgabe von $p_1,\ldots,p_n$ der Lebensweg eines Autos "nachgespielt" werden. Wiederholt man dieses "Spiel" mehrfach und legt somit r fest, so können aus den Ausgängen

Mittelwerte M' und λ' errechnet werden und mit M und λ verglichen werden.

c) Deterministisches Modell: Am Flußgraph ansetzend, können unmittelbar die $M_1,\ldots,M_n$ als Mittelwerte der Bestände in den Zuständen $S_1,\ldots,S_n$ angesehen werden. q_i $(i=1,\ldots,n)$ gibt dann den Anteil der Autos an, der von S_i nach S_{i+1} gelangt (entsprechend p_i).

Es ist dann

$$M_1 = r \quad \text{und}$$
$$M_{i+1} = q_i M_i \qquad (i = 1, \ldots, n-1)$$

Wegen $r = M_1 p_1 + \ldots + M_n p_n$

ergibt sich für die mittlere Lebensdauer

$$\lambda = \frac{p_1 M_1 + 2p_2 M_2 + \ldots + n p_n M_n}{r}$$

und nach Umformung

$$M = \lambda\, r.$$

d) Betrachtung auf unendlich vielen Zuständen: Zunächst wird eine globale Übergangswahrscheinlichkeit q gewählt $(p = q-1)$. Im stationären Fall gilt dann für den Erwarungswert der Verlustrate $\overline{M}$ und der Zulassungsrate $\overline{r}$ pro Tag

$$\overline{r} = \overline{M}\, p$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auto genau am n-ten Tag aus dem Verkehr gezogen wird, ist

$$p_n^* = q^{i-1} p \qquad (i=1,2,\ldots)$$

und

$$\overline{\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} \quad .$$

Da $0 < q < 1$, gilt:

$$\overline{\lambda} = p\left(\frac{1}{1-q}\right)^2 = p\, \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$$

und $\overline{M} = \overline{\lambda} \cdot \overline{r}$.

Allen Modellen ist gemeinsam, daß sie durch den Flußgraphen in ihren wesentlichen Zügen präfiguriert sind. Die Leistungsfähigkeit der Modelle in bezug zur Fragestellung ist vergleichbar.
Das deterministische Modell eignet sich für eine elementare Behandlung des Themas, während die stochastische Simulation am deutlichsten die Dynamik des Prozesses sichtbar macht; jedoch auf elektronische Rechenhilfen angewiesen ist.
Die Analyse von Modell (**d**) erweist sich zunächst als brauchbare Approximation der durch den endlichen Flußgraphen repräsentierten Situation, stellt sich jedoch mit dieser unter der Stationaritätsbedingung als äquivalent heraus.
Die Behandlung verschiedener Modelle erklärt sich hier nicht so sehr aus ihrer Abhängigkeit für das Problem, sondern hängt besonders vom Bildungsstand der Schüler und den Intentionen des Lehrers ab, die Trennung von Sach- und Modellebene zu explizieren. Dies wird hier besonders einsichtig wegen der Dualität

deterministisch	- stochastisch
Modell auf endlicher Zahl von Zuständen	- Modell auf unendlicher Zahl von Zuständen

Beispiel 11: Die Kinetik chemischer Reaktionen
(Sekundarstufe II - Hochschule)

In dem folgenden Beispiel tritt in noch deutlicherem Maße als im vorhergehenden Beispiel der Unterschied zwischen deterministischem und stochastischem Modell zutage und somit auch die Trennung von Modell- und Sachebene.

Das Hauptziel kinetischer Untersuchungen ist es, die Konzentrationsentwicklung der Ausgangsprodukte zu verfolgen und funktional zu beschreiben. An dem Reaktionstyp $A + B \longrightarrow C + D$ sollen nun eine deterministisches Modell und ein stochastisches Modell vorgestellt werden und ihre Adäquatheit zur Phänomenbeschreibung gezeigt werden.

a) Deterministisches Modell: In der Chemie hat sich die Beschreibung der Kinetik mittels Differentialgleichungen bewährt. Läuft die Reaktion $A + B \longrightarrow C + D$ in einer Weise ab, ohne daß Zwischenprodukte entstehen, so erfaßt die Differentialgleichung

$$\frac{d\,[A]}{dt} = -k \cdot [A] \cdot [B]$$

die Entwicklung der Konzentration von A ($[A]$).
k ist die sogenannte "Geschwindigkeitskonstante" der Reaktion.

Ist die Konzentration der Stoffe A und B zum Zeitpunkt $t = 0$ gleich, so auch zu jedem späteren Zeitpunkt.

Also

(1) $$\frac{d\,[A]}{dt} = -k \cdot [A]^2$$

Durch Diskretisieren von (1)

(2) $$\frac{\Delta\,[A]}{\Delta\,t} = -k \cdot [A]^2$$

und Anwenden des Eulerschen Streckenzugverfahrens erhält man schnell einen Überblick über den Verlauf von Lösungskurven zu (1).
Nach der Trennung der Variablen und Integration ergibt sich die Lösung.

(3) $$\frac{1}{[A(t)]} = \frac{1}{[A(0)]} + k \cdot t$$

bzw.

(4) $$[A(t)] = \frac{[A(0)]}{1+[A(0)]\,k \cdot t}$$

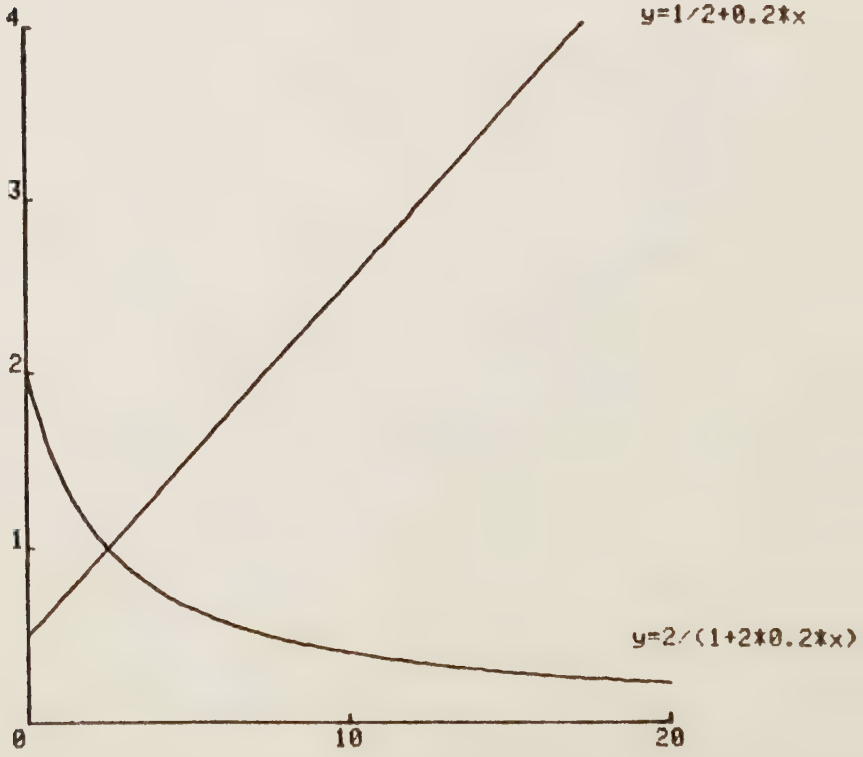


Abb.11: Graph von (4), sowie die Kehrwerte für [A]. ([A(0)]=2, k=0.2)

Ein Mittel zur Überprüfung, ob eine konkret im Labor verfolgte Reaktion $A + B \longrightarrow C + D$ ohne Entstehen von Zwischenprodukten abläuft, besteht darin, die Kehrwerte $\frac{1}{A(t)}$ der gewonnenen Meßwerte für A(t) in ein Achsenkreuz einzutragen. Dadurch müßte gemäß (3) eine Linearisierung der Meßwertkurve erreicht werden. ($[A(0)] = [B(0)]$ vorausgesetzt.)

b) Stochastisches Modell: Eine stochastische Beschreibung des Reaktionsvorgangs wird durch folgende chemische Modellvorstellung nahegelegt: Die Moleküle A und B gelangen zur Reaktion, wenn sie kollidieren. Auf dieser Vorstellung läßt sich folgendes Spiel entwerfen: In einer Urne befinden sich a rote Kugeln (Moleküle vom Typ A) und b braune Kugeln (vom Typ B). Bei einem Griff in die Urne werden zwei Kugeln gezogen, was eine Simulation des Zusammenstoßes zweier Moleküle bedeuten soll. Wird ein Kugelpaar A, B gezogen, wird es durch eine weiße (Molekül Typ C) und eine schwarze (Molekül vom Typ D) ersetzt. Es hat also eine Reaktion stattgefunden. Bei jedem anderen Zug wird das Kugelpaar unverändert in die Urne zurückgelegt. Der Verlauf dieses Spiels, bei dem sich der Computereinsatz besonders lohnt, wird in einem Protokoll festgehalten:

Beispielsweise ergab sich bei einer Urne, die anfangs 100 rote und 100 braune Kugeln enthielt, folgender Spielverlauf:

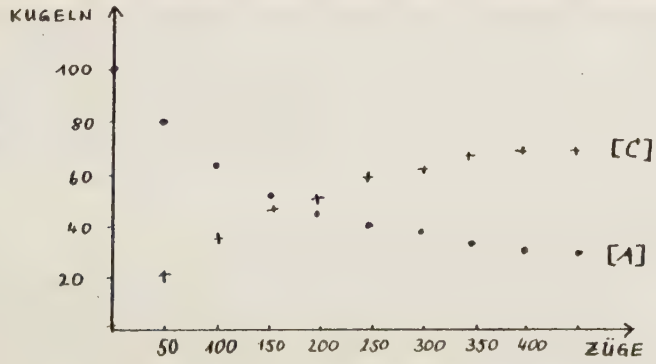


Abb. 12: Protokoll zu einem Urnenexperiment (Spielkurve).

Die Frage ist nun: Inwieweit können Urnenexperimente angemessene Beschreibungen der Kinetik chemischer Reaktionen liefern?
Zunächst müssen Interpretationen vorgenommen werden, die das Urnenexperiment in Beziehung zur Chemie (Kinetik) bringen.

- Kugeln entsprechen Molekülen. Durch Zugabe einer fünften Kugelsorte kann ein an der Reaktion nicht beteiligtes Lösungsmittel simuliert werden.
- Da an einer Reaktion eine große Teilchenzahl beteiligt ist, diese aber nicht sinnvoll aus zeitlichen und räumlichen Gründen in einer Urne verarbeitet werden können, repräsentiert eine Kugel eine bestimmte Anzahl von Teilchen. Z.B. bei einer einmolaren Lösung von A repräsentiert eine rote Kugel $\frac{1}{100}$ mol. Auf diese Weise kann einer Urne jede beliebige Konzentration zugeordnet werden.
- Verschiedene Reaktionsgeschwindigkeiten können dadurch festgelegt werden, daß einem Zug ein beliebig aber festes Zeitmaß zugeordnet wird.

Korrespondenz der Modelle: Nachdem es gelungen ist, charakteristische Merkmale der Kinetik dem Urnenexperiment aufzuprägen, geht es nun um den Nachweis einer quantitativen Korrespondenz von Urnenexperiment und Spielkurve einerseits und dem Verlauf der Reaktion und den Funktionen (1) - (4) andererseits.

Der Nachweis der Korrespondenz erfolgt dadurch, daß die quantitativen Eigenschaften des Urnenexperiments auf Eigenschaften der Funktionen (1) - (4) zurückgeführt werden. Dies soll auf zwei Ebenen geschehen.

1. Ebene: experimentell - visuell

Durch Kehrwertbildung muß die Spielkurve eine Gerade annähern. Per Augenschein geschieht dies in einem vom Experimentator akzeptierten Maße. Somit bestehen zwischen den Graphen aus Abb. 11 - Abb. 13 in diesem wesentlichen Punkt gleiche Zusammenhänge.

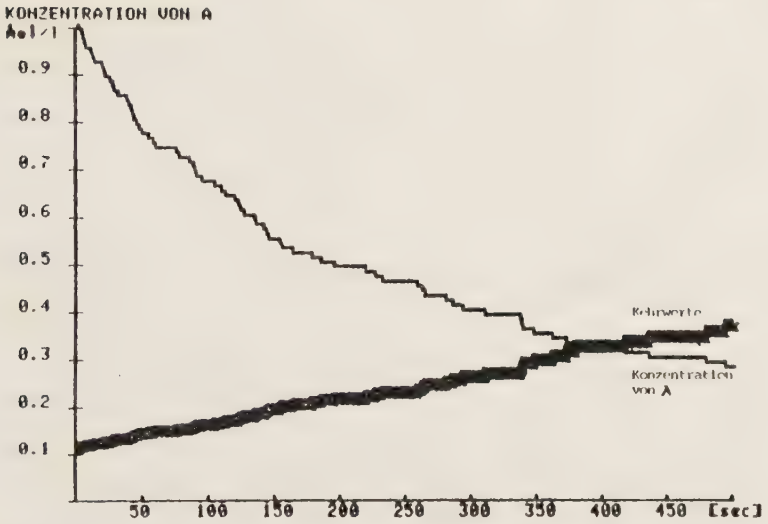


Abb.13: Kehrwerte von [A] ,wobei [A] durch stochastische Simulation gewonnen wurde.

Andererseits kann zu einer stochastischen Simulation eine passende Kurve durch systematisches Ändern von k am Computer gewonnen werden. (siehe Abb. 14)

Dieses "Wohlverhalten" der Spielkurve gibt den Mut, nach einer exakteren Überprüfung der Korrespondenz zu suchen.

2. Ebene: Anwendung des Kalküls der Stochastik

Eine Urne enthalte n Kugeln. Davon seien a rote und b braune Kugeln mit a = b. Die Wahrscheinlichkeit für das günstige Ereignis, bei dem eine Reaktion erfolgt, nämlich ein ungeordnetes Paar $\{A,B\}$ zu ziehen, ist

$$(5) \qquad p(\{A,B\}) = 2 \cdot \frac{a}{n} \cdot \frac{b}{n-1} = \frac{2}{n(n-1)} a^2$$

Das Experiment ist ein Bernoulli Experiment, da es nur zwei Ausgänge gestattet.
Sei X eine zufällige Variable, die die Anzahl der reagierenden Teilchen (Kugeln) angibt. Es reagieren zwei Teilchen oder keines. Es ist dann

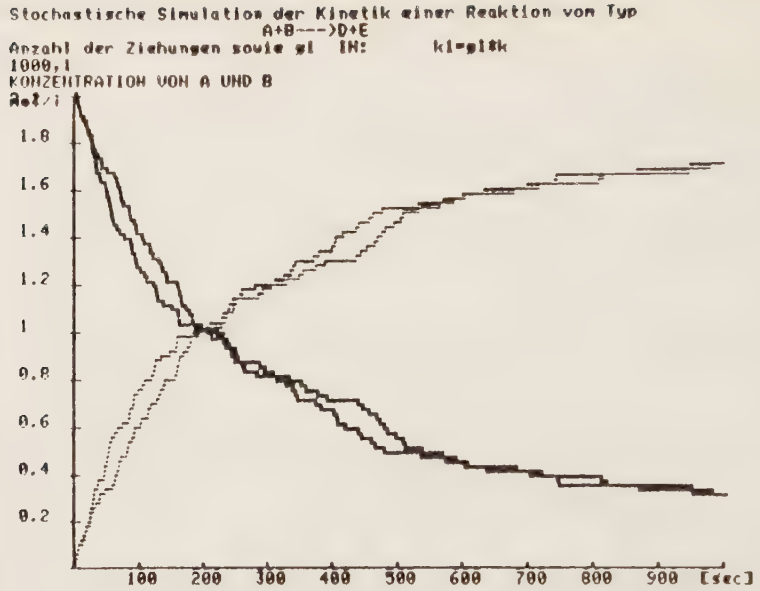


Abb.14a: Stochastische Simulation vom Typ A+B ⟶ C+D.

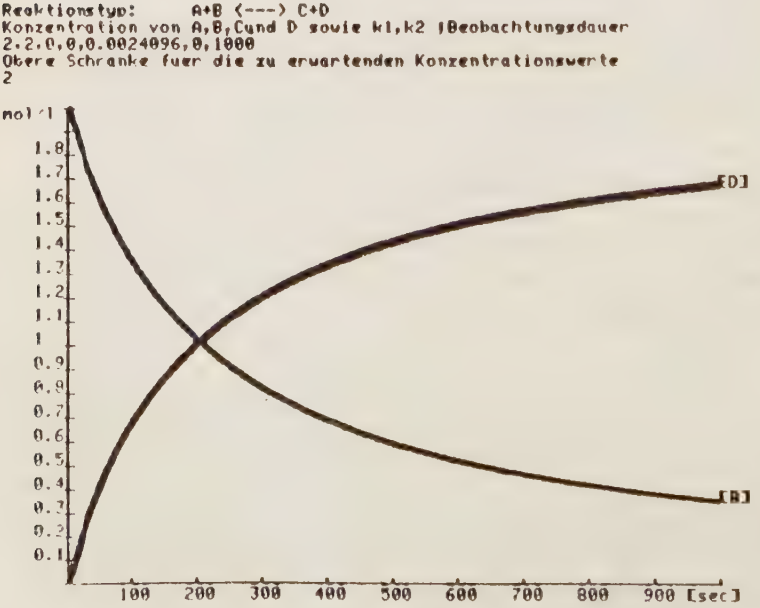


Abb.14b: Eine durch Variieren von k gefundene und zur Stochastischen Simulation"passende" Kurve.

$$p(X=2) = \frac{2}{n(n-1)}\, a^2 \quad \text{und} \quad p(X=0) = 1 - \frac{2}{n(n-1)}\, a^2.$$

Der Erwartungswert von X ist

$$(6) \quad \mathcal{E}(X) = \frac{4}{n(n-1)}\, a^2 .$$

Was besagt nun (6)? Wo bestehen Beziehungen zu einer Gleichung (1) - (4)?

Zunächst ist $\frac{4}{n(n-1)}$ eine Konstante und a bzw. a^2 ein Maß für die Konzentration des Stoffes A.
Mittels einer Konstante $\bar{k}$ kann a in [A]umgerechnet werden: $[A] = \bar{k}\, a$. Dadurch wird offensichtlich, daß die rechten Seiten von (2) und (6) in derselben Weise aufgebaut sind. Gelingt nun inhaltlich eine zu $\frac{\Delta[A]}{\Delta t}$ passende Interpretation für $\mathcal{E}(X)$?
Der Erwartungswert $\mathcal{E}(X)$ bedeutet doch, daß bei einem Zug die Anzahl der Kugeln von A bzw. B durchschnittlich um $\frac{4}{n(n-1)}\, a^2$ abnimmt. Somit stellt $\mathcal{E}(X)$ eine Änderungsrate dar, die als Änderungsrate für die Konzentration von A interpretiert wird.
(6) erlaubt also inhaltlich die gleiche Interpretation [1] wie (2).

Gründe für den Modellwechsel: Ein Vergleich der deterministischen und stochastischen Modelle erweist sich als interessant, da es vielfältige Gründe gibt, beide zu betrachten.
Zunächst läßt sich zu jedem Reaktionstyp unmittelbar mit der zugehörigen Differentialgleichung ein stetiges Modell angeben.

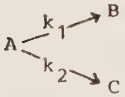
---

[1] Weiterführende stochastische Betrachtungen sollen an anderer Stelle vorgenommen werden.

Beispielsweise paßt zu der reversiblen Reaktion

$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} B$ die Differentialgleichung $\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A] + k_2[B]$

oder zu der Parallelreaktion



die Differentialgleichung $\frac{d[A]}{dt} = -k_1[A] - k_2[A]$

usw.
Die graphische Auswertung dieser Differentialgleichungen mit dem Computer durch das Anfertigen eines Richtungsfeldes oder der Auswertung von Differentengleichungen verschaffen unmittelbar einen Überblick über den zu erwartenden Verlauf der Reaktion.

Ein Ziel kinetischer Untersuchungen ist es, einen angenommenen Reaktionstyp zu bestätigen (oder als unangemessen zu erweisen) und die Geschwindigkeitskonstanten zu bestimmen: Gelingt es einen mit dem Computer erzeugten Graphen durch variieren der Geschwindigkeitskonstanten in "gute" Übereinstimmung mit einer Meßwertreihe zu bringen, so kann der zugrunde gelegte Reaktionstyp akzeptiert werden.

Verfahrensweisen, die auch ohne Computer praktikabel sind, erwachsen aus den geschlossenen Lösungen der Differentialgleichungen. Beispielsweise kann der Reaktionstyp (bei $A(o)=B(o)$) $A+B \longrightarrow C+D$ akzeptiert werden, wenn gemäß (3) die Kehrwerte von $[A]$ auf einer Geraden liegen. Die Steigung der Geraden liefert die Geschwindigkeitskonstante.

Der Vorteil der deterministischen Modelle besteht darin, daß in ihnen genau die bei kinetischen Untersuchungen interessierenden Parameter - (Anfangs-) Konzentration der Stoffe, Geschwindigkeitskonstante, Zeit- eingearbeitet sind, und somit die Korrespondenzen zwischen Reaktion und Modell klar hervortreten und keine Interpretationsschwierigkeiten auftreten.

Ein gewisser Mangel der deterministischen Modelle liegt nun darin, daß sie die naturwissenschaftliche Vorstellung von der Deutung einer Reaktion als diskreten Zufallsprozeß nicht erkennen lassen.

Die stochastische Simulation des Vorgangs mittels einer Urne erfaßt sogar die Vorstellung, daß zwei Teilchen nur dann weiterreagieren, wenn ein Zusammenstoß stattgefunden hat. Es muß jedoch ein beträchtlicher interpretativer Aufwand betrieben werden, um das Urnenexperiment qualitativ als auch quantitativ an die Bedingungen und den Ablauf der Kinetik chemischer Reaktionen anzupassen.
Der chemische Erklärungswert der Simulation leidet u.a. dadurch, daß pro Zeiteinheit nur ein Kugelpaar die Chance hat zu reagieren. Jedoch ergiebt sich zwischen der hier vorgenommenen stochastischen und deterministischen Simulation eine quantitative Übereinstimmung.

2.3 Problemformulierung, Mängeldiskussion, Modellmodifikation

In diesem Abschnitt möchte ich einige weitere typische Aspekte des Modellbildens betrachten, die in den zurückligenden Abschnitten noch nicht in der gewünschten Deutlichkeit hervortraten. Einige dieser Aspekte springen umso deutlicher ins Auge je komplexer die Ausgangssîtustion ist. An einfachen (kanonischen) Anwendungen der Mathematik im Alltag sind verschiedene Aspekte nicht sinnvoll zu explizieren, was natürlich besondere Schwierigkeiten bereitet, wenn das Thema Modellbilden in der Primarstufe zum Gegenstand eines Unterrichtsgespräches[1)] erhoben wird.

---

1) Bei einzelnen Beispielen kann auf eigene (jedoch nur punktuelle) Unterrichtserfahrung verwiesen werden. Jedoch reichen diese Erfahrungen nicht aus, um Aussagen zu treffen, die über das einzelne Beispiel hinausgehen.

Beispiel 12: Fahrt nach Sylt. Unterrichtsversuch in einem 4. Schuljahr

Präsentierung der Situation: Die Schüler erhielten einen Prospekt des Fremdenverkehrsamtes List und wurden aufgefordert, die beiden Möglichkeiten, vom Festland nach List mit dem Auto zu kommen, an einer Landkarte zu verfolgen.

a) Autoverladung in Niebüll auf den Zug.

b) Fahrt mit dem Auto über einen Straßendamm zur dänischen Insel Röm. Von dort aus Verladung auf eine Autofähre.

Die Kinder erhielten zusätzlich je einen Prospekt der konkurrierenden Verkehrsbetriebe von a) und b). Außerdem wurden einige Dias vorgeführt, die einen Eindruck von den verschiedenen Verkehrswegen geben.

DB Der kürzeste Weg nach und von Sylt

Autozüge Niebüll–Westerland

Vom 25. IX. bis 6. XI. 1977 und vom 9. III. bis 27. V. 1978

Verladeschluß-zeiten in Niebüll		Westerland an
✕	6.07	6.48
täglich	9.25	9.59
täglich	10.25	11.00
täglich	12.25	13.09
täglich	14.29	15.00
täglich	16.25	16.59
täglich	18.18	18.53
täglich	20.45	21.20

Vom 7. XI. 1977 bis 9. III. 1978

Verladeschluß-zeiten in Niebüll		Westerland an
✕	6.07	6.48
täglich	9.25	9.59
täglich	10.25	11.00
täglich	13.30	14.04
täglich	16.55	16.30
täglich	18.18	18.53
täglich	20.45	21.20

Beförderungskosten für Pkw (einschl. Umsatzsteuer): Leergewicht bis 1100 kg 35,00 DM, über 1100 kg 40,00 DM. Fahrzeuginsassen, Reisegepäck u. Hunde werden frei befördert.

Nähere Auskünfte erteilen die Bahnhöfe Niebüll ☎ (0 46 61) 42 33 und Westerland ☎ (0 46 51) 2 24 79

Platzreservierung nicht erforderlich

Herausgeber: Bundesbahndirektion Hamburg

LINDINGER LINIEN

AUTO- UND PERSONENFÄHRE RØMØ-SYLT

Fahrpreise

PKWs ohne Fahrer	TAGESTRUCK FAHRKARTE	Einfach	Hin und zurück
bis 1100 kg	21,00	16,00	32,00
über 1100 kg	26,00	24,00	40,00
Busse je m		4,50	7,00
Wohnwagen je m		5,50	9,50
Personen vom 15.6. - 10.9.			
Erwachsene		3,00	5,00
Kinder unter 15 Jahre		1,50	2,50
Personen außer 15.6. - 10.9.			
Erwachsene*)		2,00	3,00
Kinder unter 15 Jahre		1,00	1,50

Sechserkarte: DM 10,00 gültig vom 15.6. - 10.9. für 6 einfache Fahrten für 1 Person oder 3 Erwachsene hin u. zurück oder 2 Erwachsene u. 2 Kinder hin u. zurück

Zehnerkarte für PKW, 30% Rabatt

Gruppen ab 10 Pers. 40% Rabatt (nicht Lampionfahrt)

*) Samstag Abend Lampionfahrt DM 5,00

Beachten Sie bitte unsere Bekanntmachungen über den zollfreien Einkauf an Bord

Überfahrtszeit 45 Minuten

Kraftfahrzeuge mit Reservierungen müssen spätestens 20 Minuten vor Abfahrt eintreffen

Personalausweis oder Reisepaß auch für Kinder erforderlich. Grüne Versicherungskarte nicht erforderlich. Mitnahme von Hunden und Katzen mit Impfpaß möglich

Eine allgemeine Problemformulierung war schnell gefunden. Jeder Urlauber steht vor der Entscheidung für a) oder b). Um eine präzise Fragestellung, die ein Kriterium für eine Entscheidung enthält, entwickelte sich ein längeres Gespräch. Einige markante Schülerbeiträge:

(I) Ich fahre über Dänemark; da war ich noch nie.
(II) Mit dem Zug geht es sicher schneller.
(III) Auf dem Schiff kann man seekrank werden.
(IV) Ich würde gern mal mit dem Schiff fahren.
(V) Aber mit dem Autozug ist es sicher auch spannend.
(VI) Mein Vater fährt immer gleich nach der Arbeit in den Urlaub, da muß man schauen, ob man noch mit dem Zug oder der Fähre auf die Insel kommt.
(VII) Man könnte sich überlegen, was billiger ist.
(VIII) Wir müssen mit dem Autozug fahren, weil wir unseren Hund mitnehmen. (Die Schülerin hatte das Kleingedruckte gelesen).

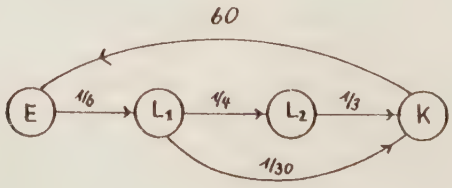
Es folgte eine kurze Besinnung über die Punkte, bei denen man "was rechnen" könnte.
Im Unterricht wurde der Punkt (VII) verfolgt, wobei die konkrete Familie des Schülers betrachtet wurde, dessen Familie nach Sylt fahren würde.
Die Fahrtkostenermittlung für die Routen a) und b) erfordert die Beschaffung vielfältiger Daten, sowie den Umgang mit allen bisher in der Grundschule behandelten Größenbereichen.
Es erweist sich schließlich die Route über Dänemark als preisgünstiger.

Mangeldiskussion: Eine Diskussion über die ermittelten Kosten wurde durch den Lehrer eingeleitet. "Wenn Herr Bergmann über Dänemark fährt, genügt es dann wirklich, daß er 55,10 DM für die Fahrt bereithält?"
Nach einigem Schweigen bemerkte eine Schülerin: "Wir haben das ja nur gerechnet." Verschiedene Möglichkeiten Geld auszugeben, aber auch zu sparen (Zollfreier Einkauf auf dem Schiff) wurden anschließend von den Schülern aufgezählt, und führten

zu einigen Modifikationen an der Modellrechnung (z.B. ein Essen auf der Fähre).

Nochmals Beispiel 7: Populationsdynamik (Sekundarstufe I)

Im Rahmen eines Schulversuchs zum Computereinsatz in einer 7. Klasse (Gymnasium) wurden einige Überlegungen über die Eigenschaften bzw. Mängel eines Modells am Beispiel der Entwicklung von Maikäferpopulationen vorgenommen. Als positive Eigenschaft des Modells wurde von den Schülern vermerkt, daß das Modell, die aus dem Biologieunterricht bekannten (meist) 4-jährigen Schwankungen wiedergibt.
Als negativ wurde vermerkt, daß nach der Festlegung der Parameter die Population dauernd ansteigt, gleichbleibt oder fällt. Beispielsweise nahm in der Natur die Maikäferpopulation in den vergangenen 20 Jahren rapide ab, seit ca. drei Jahren steigt sie wieder. Als Grund wurde angeführt, daß die Käfer resistent gegenüber bestimmten Insektenvernichtungsmitteln geworden sind. Zur langfristigen Prognose eignet sich das Modell also nicht.
Eine erneute Beschäftigung mit dem Modell ergab sich aus einer Bemerkung seitens des Lehrers: "Nimmt man an, daß in einem Jahr wegen ungünstiger Witterung (Nachtfröste im Mai) die Käfer erfrieren und keine Eier ablegen können, dann müßte nach vier Jahren kein Käfer zu sehen sein. Dies tritt in der Natur jedoch nicht ein. Der Grund liegt darin, daß ein kleiner Teil der Larven schon nach dem dritten Jahr zu Käfern wird."
Das Programm wurde auf der Grundlage des folgenden Flußgraphen modifiziert.



Eine entsprechende Tabelle zeigt, daß dieses Modell entsprechend den Verhältnissen in der Natur ausgleichend wirkt.

```
EINGABE:EIER,LARVEN IM 1. J,LARVEN IM 2. J,KAEFER
1200,300,100,0
```

EIER	LARVEN 1.J	LARVEN 2.J	KAEFER
0	199	75	43
2599	0	49	31
1899	433	0	16
999	316	108	14
866	166	79	46
2799	144	41	31
1916	466	36	18
1122	319	116	27
1655	187	79	49
2972	275	46	32
1971	495	68	24
1487	328	123	39
2370	247	82	52
3133	395	61	35
2138	522	98	33
2029	356	130	50
3019	338	89	55
3324	503	84	40
2458	554	125	44
2697	409	138	60
3624	449	102	59
3589	604	112	49
2947	598	151	57
3456	491	149	70
4217	576	122	66
3974	702	144	60
3608	662	175	71
4286	601	165	80

Beispiel 13: Fahrt durch den Mont-Blanc-Tunnel (Sekundarstufe II)

Präsentierung der Situation: Der Lehrer erzählt von einer Autofahrt in die französischen Alpen: "Vor dem Mont-Blanc-Tunnel hat sich eine Autoschlange von ca. 2,5 km gebildet. Es ist heiß: 28°. Vor dem Tunneleingang ist eine Gebühr zu entrichten. Die Höchstgeschwindigkeit ist im Tunnel auf 50 km/h begrenzt. Der Tunnel ist ca. 15 km lang, die durchschnittliche Wagenlänge 5m und die Bremsverzögerung $5m/sec^2$. Die Tunnelgesellschaft fordert von jedem Autofahrer, daß er den Anhalteweg als Mindestabstand zum Vordermann einhält. Durch Katzenaugen an der Tunnelwand kann der Abstand zum Vordermann überprüft werden."

Anmerkung: Die Situation wurde Studenten eines Programmierkurses vorgelegt. Nach zehnminütiger Pause ein Student: "Wir wissen nicht was wir tun sollen."

Aus der Situation können beispielsweise folgende Fragestellungen herausgelöst werden:

-Wie groß ist der Anhalteweg bei 50 km/h?

-Bestimme die "Anhaltewegfunktion"

-Gibt es eine optimale Geschwindigkeit, die einen maximalen Autodurchsatz pro Stunde gestattet (unter Beachtung der Sicherheitsregel: Abstand zum Vordermann = Anhalteweg) ?

Überraschenderweise stellt sich der optimale Autodurchsatz bei ca. 30 km/h ein (vgl. BECK 1977c).

Modellmodifikationen können auf der Basis verschiedener Regeln für die Sicherheitsabstände vorgenommen werden. Z.B.: "Tacho Halbe", Reaktionsweg usw. Ein Modellfehler liegt u.a. darin wenn die Wagenlänge außer Acht gelassen wird.

Die Modellmodifikationen erzeugen unterschiedliche Funktionen: lineare, quadratische, gebrochen rationale. Aus diesem Grunde eignet sich die Situation für eine integrierte Wiederholung zum Thema Funktionen im Analysisunterricht.

2.4 Modellierung mathematischer Situationen

Im Verlaufe der Arbeit haben wir fast ausschließlich den Prozeß des Modellbildens auf die Mathematisierung realer Situationen bezogen. Das Grundmuster dieses Prozesses bestand darin, daß Situation und Fragestellungen eines Bereiches durch Übersetzungsvorgänge (Interpretationen) in einen anderen Bereich übertragen werden, dort behandelt werden und anschließend wieder in den ursprünglichen Bereich zurückinterpretiert werden.
Diese Vorgehensweise ist jedoch auch innerhalb der Mathematik von überragender Bedeutung.
Aus historischer Sicht ist die Algebraisierung der Geometrie das erste bedeutende Beispiel, das auch in der Schule von großer Bedeutung ist.

DESCARTES hat die Algebraisierung auf der Suche nach einer universellen Problemlösemethode auch thematisiert (siehe POLYA 1966).

Wir wollen im folgenden einige Unterrichtsbeispiele zusammenstellen, denen die Modellierung mathematischer Situationen zugrunde liegt.

Beispiel 14. Reguläre Parkettierung (Sekundarstufe I)

Geometrische Problemstellung: Welche regulären n-Ecken gestatten eine Parkettierung der Ebene?

Geometrie		Algebra
Formulierung einer geometrischen Bedingung: Die in einem Punkt zusammenstoßenden Innenwinkel eines regulären n-Ecks müssen einen Vollwinkel ergeben.	Algebraisierung →	Der Innenwinkel eines regulären n-Ecks ist $((n-2)/n) \cdot 180^{\circ}$. k sei die Anzahl der in einer Ecke zusammenstoßenden n-Ecke. Dann werden die Paare (n,k) mit n, $k \in N$ und $n, k > 2$ gesucht, für die gilt: $k \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdot 180^{\circ} = 360^{\circ}$ oder $\frac{1}{k} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$. Die Paare (3,6); (4,4) und (6,3) erfüllen die Bedingung. Weitere Paare kommen nicht in Betracht, da 1) für n=5 der zugehörige Wert von k nicht ganzzahlig ist, und 2) für n>6 und jedem Stammbruch $\frac{1}{k}$ (k>2) die Summe $\frac{1}{n} + \frac{1}{k}$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.
Es gibt drei reguläre Parkettierungen und zwar mit dem regulären Dreieck, Viereck und Sechseck, wobei in einer Ecke 6 , 4 bzw. 3 Vielecke zusammenstoßen.	← Interpretation des algebraischen Ergebnisses	

Beispiel 15: Analytische Geometrie

Einen ganzen Bereich, in dem die Algebraisierung geometrischer Probleme geradezu Programmpunkt ist, stellt die Analytische Geometrie dar, wie sie bis vor ca. 10 Jahren als Kegelschnittlehre an den Gymnasien betrieben wurde (vgl. LAMBACHER/SCHWEIZER, 1958). Typisch für Problemstellungen ist die Formulierung "Konstruiere und berechne...".

Die Vermengung der beiden Begriffsysteme ist teilweise so stark, daß zwischen den zugehörigen Objekten nicht unterschieden wird.
Die folgende Tabelle ist ein Ausschnitt aus einem Lexikon, das die Beziehungen zwischen geometrischem Objekt und seiner algebraischen Darstellung herstellt:

Geometrie	Algebraisierung im kartesischen Koordinaten-System
Punkt	Koordinaten (x,y)
Gerade	$y = mx + b$
Kreis um Ursprung	$x^2 + y^2 = r^2$
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
.	.
.	.
.	.

Am Beispiel der Bestimmung von Ortslinien kann die Arbeitsweise der analytischen Geometrie verdeutlicht werden:

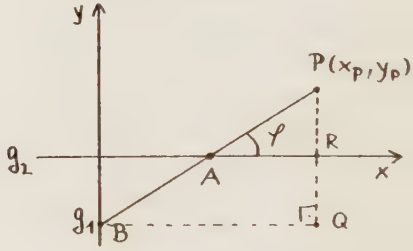
Geometrie

Problem: Betrachte die Spur, die das Ende P einer Strecke (Stabes) in der Zeichenebene hinterläßt, wenn das andere Ende B auf einer Geraden g_1 geführt wird und ein fester Punkt A auf einer zu g_1 senkrechten Geraden g_2.

Algebraisierung →

Analytische Betrachtung

Der Weg zu einer analytischen Behandlung wird dadurch geebnet, daß ein kartesisches Koordinatensystem günstig eingeführt wird.



$\overline{AP} = b; \quad \overline{BP} = a.$

$\overline{BQ} = x_p = a \cdot \cos\varphi$

$\overline{PR} = y_p = b \cdot \sin\varphi$

$$\frac{x_p^2}{a^2} = \cos^2\varphi$$

$$\frac{y_p^2}{b^2} = \sin^2\varphi$$

Die Spur stellt eine Ellipse dar.

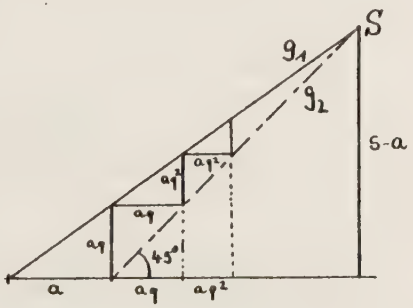
← Interpretation

$$\frac{x_p^2}{a^2} + \frac{y_p^2}{b^2} = 1$$

Die Behandlung derartiger geometrischer Aufgaben mit dem Computer erfordert naturgemäß ihre Algebraisierung.

ispiel 16: Analysis

s Vorgehen der Algebraisierung geometrischer Probleme ist in der
hule weit verbreitet. Es stellt jedoch keine Einbahnstraße dar.
gibt auch eine Reihe von Problemen aus verschiedenen Bereichen,
ren Geometrisierung das Verständnis für diese Probleme erleichtert.
Beispiel der Grenzwertbetrachtung für unendliche geometrische Reihen
rd dies deutlich.

alysis		Geometrie und Algebraisierung
oblemstellung: Betrachte e unendliche geometrische lhe $a+aq+aq^2+aq^3+$ ..... age: Konvergiert die Reihe d ggf. mit welchem Grenzrt?	Geometrisierung →	Entwicklung eines Konstruktionsverfahrens für die Glieder a, aq^2, aq^3 .....
		
		ist $\|q\| < 1$ so schneiden sich g_1 und g_2. s bestimmt man mit dem 2. Strahlensatz. $\frac{a}{s} = \frac{aq}{s-a}$
$\|q\| < 1$ konvergiert e Reihe mit dem Grenzwert $= \frac{a}{1-q}$	← Interpretation	$s = \frac{a}{1-q}$
		für $q = 1$ laufen g_1 und g_2 parallel. Es gibt keinen Schnittpunkt.
ür $\|q\| \geq 1$ divergiert e Reihe	← Interpretation	Für $\|q\| > 1$ ebenfalls nicht.

2.5 Die Verwendung von Hilfsmitteln beim Modellbilden - erläutert am Beispiel des Computers

In Kapitel II wurde der Prozess des Modellbildens durch ein mehrschrittiges Schema beschrieben, das - wie wir schon gesehen haben - in verschiedener Hinsicht interessant ist. Hier wollen wir es erneut betrachten,und zwar im Hinblick auf die dabei eingesetzten Hilfsmittel.
Im Berufsleben sind derartige Hilfsmittel - insbesondere bei Routineproblemen - meistens standardisiert, was sich beispielsweise in vorgedruckten Datenerhebungsbogen, fertigen Programmpaketen oder speziellen Nomogrammen zur Auswertung der Daten ausdrückt. Es handelt sich hierbei in erster Linie darum, eine Routine möglichst ökonomisch ablaufen zu lassen, ohne daß der Benutzer deren interne Struktur verstehen muß.
Im Bereich der allgemeinbildenden Schule sind die Akzente anders gesetzt. Der Schüler soll seinerseits beim Entwurf von Hilfsmitteln so weit wie möglich selbst mitwirken und hierbei eigene Ideen verwirklichen. Weiter soll er eine Auswahl von Hilfsmitteln kennenlernen und exemplarisch einen Einblick in die vielseitige Verwendbarkeit von Hilfsmitteln erhalten.

Beim Modellbilden sind Hilfsmittel vielfältig einsetzbar. Betrachten wir z. B. folgende Liste möglicher Hilfsmittel für den Schritt 1 (Konfrontation mit der Situation), die vor allem vom Lehrer aus didaktischen Überlegungen in den Unterricht eingebracht werden: Vom Lehrer vorgetragene oder vom Tonband abgespielte Situationsgeschichten (GRAUMANN, 1977); naturwissenschaftliche Experimente oder Rollenspiele (KARASCHEWSKI, 1966); Prospekte (BECK, 1976 b), (MÜLLER/WITTMANN, 1977); Zeitungsausschnitte (BOSCH/WITTMANN, 1976); Situationsbilder, wie sie traditionell in

vielen Schulbüchern verwendet werden. Für die anderen Schritte lassen sich entsprechende Listen zusammenstellen.

Eine kurze Durchmusterung der Hilfsmittel zeigt, daß viele nicht nur für einen Schritt verwendbar sind. Beispielsweise enthalten Prospekte oftmals in Form von Tabellen eine übersichtliche Darstellung von Daten, so daß ein wesentlicher Beitrag zu Schritt 4 (Sammlung von Daten) geleistet ist. Wir wollen uns im folgenden auf die Verwendungsmöglichkeiten des Computers konzentrieren, der über einen didaktischen Rahmen hinaus heute bei Anwendungen in der Wirtschaft, im Ingenieurwesen, in der naturwissenschafltichen Forschung das wichtigste Hilfsmittel ist. Vor allem gelangen durch den Computer komplexe und realistische Beispiele in die Bearbeitungsreichweite des Schülers, und entsprechende für den Dialogbetrieb konzpierte Computermodelle (Simulationen) gestatten ein eingehendes und unkompliziertes Studium verschiedener Situationsvariationen. Damit wird auch das didaktische Anliegen unterstützt, den Modellbildungsprozess als Forschungsmethode kennenzulernen.

Eine breite und optimale Nutzung des Computers beim Modellbilden bzw. der Simulation im Unterricht scheint mir nur dann in sinnvoller Weise möglich, wenn die hardware und software bestimmten Anforderungen genügt, wobei der augenblickliche Stand der Technik und die Marktlage berücksichtigt werden muß.

a) Der Computer muß ein schuleigenes bzw. institutseigenes System sein, um seinen unbürokratischen Einsatz zu ermöglichen. Der Schüler, Lehrer oder Student muß einen (fast) ungehinderten Zugang zum Gerät haben, was bei Rechenzentrumsgeräten nicht der Fall ist. Hinzu kommt, daß Programme für Großrechner in Rechenzentren von einer aufwendigen Job-Control-Language begleitet werden müssen. Greifbare schuleigene Systeme sind jedoch auf ca. 32 KByte beschränkt.[1)]

[1)] Die in dieser Arbeit erwähnten Programme benötigen maximal 6 KByte.

b) Der Computer sollte einen graphischen Bildschirm besitzen, damit die Aussagekraft von Graphiken genutzt werden kann. Refresh-Schirme sind breiter einsetzbar als permanentspeichernde graphische Schirme, insbesondere eignen sie sich für die Darstellung von Bewegungsabläufen.

c) Das System muß dialogfähig sein, damit Schüler selbst die schnelle Variation von Parametern und schnelle Eingriffe in das Modell vornehmen können.

d) Der Punkt c) setzt entsprechend übersichtlich strukturierte Programme voraus.

Es liegt in der Natur des Computers als symbolverarbeitende Maschine, daß seine Verwendung als Hilfsmittel beim Modellbilden vor allem in Beziehung zu Aktivitäten in der Modellebene gebracht wird.
Für den 1. Schritt (Konfrontation mit Situationen) besitzt der Computer keine große Bedeutung. Zwar gestatten hochwertige (und teure) Computer filmähnliche Darstellungen, deren Präsentation jedoch durch das dahinterstehende Programm eine "Realität aus zweiter Hand" ist, eine visualisierte Mathematik. (Es ist beispielsweise ohne weiteres möglich, den Auslaufvorgang aus Wasserbehältern auf einem Refresh-Schirm zu demonstrieren). Vom Computer erzeugte Situationen erfordern bereits eine Mathematisierung, die im Programm ihren Niederschlag findet.

Für die folgenden Schritte 2 und 3 (Problemformulierung und Klassifizierung) sind ebenfalls keine bedeutsamen Einsatzmöglichkeiten gegeben, während der Computer in Schritt 4 (Sammeln und Analyse der Daten) eine wesentliche Hilfe sein kann).

Der Schwerpunkt des Computereinsatzes in Schritt 4 liegt auf seiner unterstützenden und dokumentierenden Funktion beim Sammeln von Daten. Zwei Fälle können unterschieden werden.

a) Daten werden der Situation entnommen.
b) Ein mathematisches Modell produziert Daten, die mit dem gleichen oder einem anderen Modell weiterverarbeitet werden.

Beispiel zu a):

Zur Äquivalenzpunktbestimmung einer vorgegebenen Flüssigkeit geht ein Chemiker folgendermaßen vor: Der Flüssigkeit werden konstante Säuremengen zugetropft und es werden pH-Werte der Flüssigkeit gemessen. Die Stelle mit der größten pH-Wertänderung bestimmt den Äquivalenzpunkt.
Die pH-Werte werden in den Computer eingelesen und stehen nun zur Weiterverarbeitung bereit: Z.B. Anfertigung einer graphischen Darstellung; Zeichnung der Differenzenkurve, Aussortieren der größten Differenz usw. (BECK, 1977d). Die Bedeutung des Computers liegt hier vor allem darin, daß ein Datensatz für verschiedene Fragestellungen schnell verfügbar gehalten wird.

Beispiele zu b):

(i) GUENTHER (1978) hat ein computergesteuertes Planspiel zur Simulation eines Lagerhaltungsproblems entwickelt. Anfallende Bestellwünsche und Verkaufszahlen werden während des Spiels verarbeitet. Eine "paper-and-pencil" Auswertung des Lagerbestandes wäre zu zeitaufwendig und fehleranfällig und würde vor allem zu sehr von der angestrebten Konzentration auf das strategische Verhalten des Lagerverwalters ablenken.

(ii) Durch Diskretisieren eines Beschleunigungsprotokolls einer U-Bahn ergibt sich ein Datensatz. Dieser Datensatz liefert nach Anwendungen des Summenoperators (Modell) einen Datensatz für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Fahrzeit. Auf diesen Datensatz wird das gleiche Modell nochmals angewendet und liefert einen Datensatz über die Entfernung der U-Bahn

von der Ausgangsstation.

Die Konstruktion von Vormodellen (5. Schritt) ist weitgehend unabhängig vom Computer.

Im 6. Schritt gewinnt der Computer wieder an Bedeutung und zwar nicht in dem Sinne, daß der schöpferische Akt der Konstruktion von Modellen durch den Computer erleichtert wird, sondern in dem Sinne, daß Modelle unter der Möglichkeit des Computer-Einsatzes konzipiert werden können. Dadurch wird das Arsenal von sinnvoll weiterzuverarbeitenden Modellen beträchtlich ausgedehnt. Insofern wird Schritt 6 durch Schritt 7 beeinflusst. Vermutlich werden solche Modelle favorisiert, die intuitiv überzeugender oder der Berechnung zugänglicher erscheinen. Durch den Computer kommen vor allem folgende Modellklassen ins Blickfeld.

(i) Modelle, in denen große Datenmassen (mit elementerer Mathematik) verarbeitet werden. (Beispiel: Bevölkerungsentwicklung in der Bundesrepublik (SCHRAGE, 1978)).

(ii) Modelle, deren Lösungen durch systematisches "Probieren" ermittelt werden (Beispiel: Ganzzahlige Lösungen linearer Ungleichungssysteme. Kap. IV, Beispiel 3).

(iii) Rekursiv oder iterativ formulierte Modelle, oder Modelle die durch "kanonische" innermathematische Modellierung auf rekursive oder iterative Form gebracht werden wie beispielsweise bei der wiederholten Anwendung von Transformationsmatrizen (siehe Kap. IV, Beisp. 2), oder bei dem Ersetzen von Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen, die mit bekannten numerischen Verfahren, wie dem Eulerschen Streckenzugverfahren, dem Runge-Kutta-Verfahren usw. bearbeitet werden.
(Beispiele: Differentialgleichungen(systeme) aus der Physik, Chemie, Biologie. SCHEY, (1970); BECK/BÜTTNER/KUNTZSCH (1977); BECK (1977 b, c, d), MAGNAT/THALMAN (1978).)

(iv) Auswertung von Funktionen in Form von Wertetabellen, die ihre Aussagekraft jedoch erst durch ihre graphische Darstellung bekommen.
(Beispiele: Planetenbewegung: STEIN (1976), SCHUPPAR (1978)).

(v) Von besonderer Bedeutung ist der Computer für die stochastische Simulation. Erst durch den Computer ist die stochastische Simulation komplexer Vorgänge zu einem bedeutenden Arbeitsmittel geworden.
(Beispiele: ENGEL (1975), BECK (1977e), SCHRAGE (1978).)

Über diese pragmatischen Gesichtspunkte hinaus eignet sich der Computereinsatz zu einem dynamisierten Erleben des Verhaltens der Modelle. Den Modellen wird ihre Statik genommen. Außerdem trägt die einfache Möglichkeit zum ändern der Parameter zur Vertiefung des Verständnisses und Gewinnung neuer Einsichten in das Verhalten des Modells und der Zusammenhänge zwischen den Modellvariablen bei. Das Studium eines Modells erfordert vielfach dieselben Rechnungen. Der Computer entlastet und läßt das Problem selber in den Vordergrund treten.
(Beispiel: Wie entwickelt sich die Konzentration des Stoffes B bei dem Reaktionstyp $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$, wenn k_1 klein (groß, gleich) gegenüber k_2 ist?)
Das Experiment am Modell begünstigt die Entwicklung potentieller Einsichten in die Realität und regt zur Hypothesenbildung an.

Nach dem Schritt 8 (Interpretation der Ergebnisse und ihrem Vergleich mit dem Verhalten der Situationen in Schritt 9) kann eine Modellmodifikation nötig werden, damit eine bessere Übereinstimmung der interpretierten Modellergebnisse mit der Situation erreicht werden. In vielen Fällen erweist sich der Computer bei diesem regelkreisartigen Vorgehen (Validierungsprozess) als äußerst effektives Hilfsmittel. Die Modellmodifikation schlägt sich oft nur im Abändern von Teilen von Programmzeilen nieder, während die verwendeten Methoden in Schritt 8 unverändert

bleiben. Dies reizt natürlich dazu, Korrekturen an Modellen vorzunehmen

Beispiele:

(i) Lotka-Voltera-Gleichung für Räuber (R)-Beute (B)Systeme

$$\frac{dN_R}{dt} = g_R N_R N_B - s_R N_R$$

g Geburtenrate
s Sterberate

$$\frac{dN_B}{dt} = g_B N_B - s_B N_B N_R$$

Eine Modifikation, bei der die Kapazität K der Umwelt in bezug auf das Beutetier beachtet ist:

$$\frac{dN_B}{dt} = g_B N_B - s_B N_B N_R - \frac{1}{K} N_B^2$$

(ii) Wird die Ausflußöffnung bei einem Wasserbehälter sehr klein, so beschreibt die in Kap. IV, Beispiel 3 vorgenommene Simulation den Vorgang nicht mehr in befriedigendem Maße. Ein Modell, bei dem die Änderungsrate proportional zur Wasserstandshöhe ist, "paßt" besser.

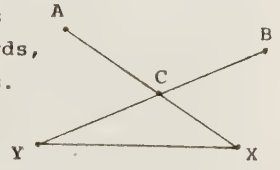
Solche Modifikationen von Modellen finden im augenblicklichen Unterricht nur selten satt, weil in der Schule überwiegend Situationen mathematisiert werden, bei denen die Modellbildung offensichtlich ist (kanonische Zuordnung von Modell und Situation); außerdem beianspruchen Modellmodifikationen viel Zeit. Dadurch wird dem Schüler ein wesentliches Element im Erkenntnisprozess, vor allem der Realwissenschaften, vorenthalten. Durch die zeitsparende Wirkung kann hier der Computer entlastend wirken.

2.6. Verkürzungen beim Modellbilden - eingekleidete Aufgaben

Bisher habe ich mich bemüht Beispiele für Anwendungen der Mathematik vorzustellen, die in möglichst umfassender Weise den Prozess des Modellbildens erfordern. Die Behandlung realer und zum Teil komplexer Problemsituationen gehört zu den wesentlichen Anliegen der vorliegenden Unterrichtskonzeption. Diesem Anliegen wird in Kap. IV nochmals ausführlich nachgegangen. Trotzdem ist es sinnvoll und didaktisch begründbar in einer flexiblen Weise Aufgaben zu behandeln, die eine verkürzte Behandlung realer Problemsituationen darstellen. Am Beispiel der "eingekleideten Aufgaben", durch die in überwiegender Weise die Anwendungen in Schulbüchern repräsentiert werden (vgl. Kap. I) soll gezeigt werden, wie derartige Aufgaben sinnvoll in die vorliegende Konzeption integriert werden können.
Charakteristisch für "eingekleidete Aufgaben" ist, daß sie dem Modellbildungsprozess nur bruchstückhaft folgen: Die für die Rechnung notwendigen Daten sind gegeben, ebenso meist eine präzise Frage. Viele dieser Aufgaben sind so gestellt, daß sie keine Ausschnitte echter Anwendungen sind, sondern lediglich in einem Vokabular formuliert sind, das möglichen Anwendungsbereichen entlehnt ist, jedoch sind die Aufgaben in den betreffenden Bereichen ohne Bedeutung oder die Realität dieses Bereichs wird verfälscht wiedergegeben.

POLLAK (1969) nennt zwei Beispiele:

(i) "To find out how for to tunnel through a hill, a surveyor lays out AX = 100 yards, BY = 80 yards, CX = 20 yards and CY = 16 yards. He finds by measurement, that YX = 30 yards. How long is the tunnel AB?"



Vermutlich liegt der Aufgabe die Annahme zugrunde, daß A,B,C,Y und X in einer Ebene liegen. Da das Land in dieser Umgebung des Bergs eben ist, würde niemand darauf kommen, den Berg zu untertunneln.

(ii) "Two bees working together can gather nectar from 100 hollyhock blossom in 30 minutes. Assuming that each bee workes the standard eight-hour-day, five days a week how many blossom do these bees gather nectar from in a summer season of fifteen weeks?"

Die Arbeitszeitregelung ist dieser Aufgabe unangemessen.

In Kap. I wurden Aufgaben dieser Art einer Kritik unterzogen. Trotz dieser Kritikpunkte darf zwischen "eingekleideten Aufgaben" und realen Anwendungen keine falsche Dichotomie aufgebaut werden. Aus unterschiedlichen Gründen kann man die Behandlung eingekleideter Aufgaben nicht nur negativ sehen. Folgende Anliegen sprechen für eine angemessene Behandlung eingekleideter Aufgaben:

1) Bisher ist es nicht gelungen, einen Mathematikunterricht in überzeugender Art zu organisieren, der nur einer Kette echter Anwendungen folgt. Das scheitert augenblicklich an den schulorganisatorischen Problemen, der fehlenden angemessenen Vorbereitung der Lehrer, dem großen Zeitaufwand, das Schulbuch ist vielfach als Medium für die Präsentation realer Problemsituationen nicht geeignet usw. Außerdem weisen MÜLLER/WITTMANN (1977, S. 260) darauf hin, daß der Unterricht von den mathematischen Inhalten besser zu strukturieren ist. Zum Üben und Einführen dieser Inhalte bieten sich also eingekleidete Aufgaben an, die die Gewähr bieten, daß entsprechende Inhalte, Kalküle trainiert werden.

2) Die Bearbeitung von eingekleideten Aufgaben kann als Vorstufe zur Behandlung echter Anwendungen angesehen werden, da der für echte Anwendungen typische Übersetzungsvorgang von der Situationssprache in die mathematische (meist algebraische) Sprache geübt wird. POLYA (1966, S. 50) verdeutlicht dieses Vorgehen an einer "amüsanten" Aufgabe:

Formulierung der Aufgabe:

Situationssprache	algebraische Sprache
Ein Bauer hat eine gewisse Anzahl von Hühnern	x
und eine gewisse Anzahl von Kaninchen	y
Diese Tiere haben zusammen 50 Köpfe	x + y = 50
und 150 Füße	2x + 4y = 140

3) Es ist eine Eigenart der meisten Schulbücher, daß eingekleidete Aufgaben unter einer mathematisch inhaltlichen Rubrik zusammengestellt werden, so daß die anzuwendenden mathematische Methode vorgegeben ist. Das erleichtert die Behandlung dieser Aufgaben und kann als behutsame Hinführung zur Anwendung interpretiert werden. Erst unter den Abschnitten "Vermischte Aufgaben" ist nicht mehr von vornherein klar, welcher Kalkül zum Zuge kommt. Diesem Vorgehen stehen die Anforderungen der Realität entgegen, womit den Problemen nicht gleichzeitig der Kalkül mitgeliefert wird, so daß die Behandlung von offenen Situationen in Projekten als Gegengewicht unerläßlich bleibt.

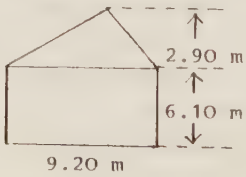
4) Bei der Behandlung von eingekleideten Aufgaben ist es wichtig auf stillschweigende Voraussetzungen hinzuweisen, um dem Bild von einer bagatellisierten Umwelt entgegenzuwirken. Schließlich wäre es unredlich den Schüler im Glauben zu lassen, daß hier echte Anwendungen betrieben werden. Durch das Aufdecken der stillschweigenden Voraussetzungen werden die Schüler angeregt Zusammenhänge aus Realitätsbereichen aufzudecken.

Beispiel: "Ein Aufklärungsflugzeug fliegt bei stiller Luft 220 Meilen pro Stunde. Es führt Brennstoff für eine sichere Flugzeit von 4 Stunden bei sich. Wenn es gegen den Wind von 20 Meilen pro Stunde aufsteigt, wie weit kann es fliegen und ohne Risiko wieder zurückkehren?" (POLYA, 1966, S. 58)
Vorausgesetzt wird: Der Wind weht dauernd mit gleicher Geschwindigkeit; der Pilot "spielt" nicht am Gashebel; Das Flugzeug fliegt immer in die gleiche Richtung; das Wendemannöver wird vernachlässigt.

5) Eine Reihe der eingekleideten Aufgaben sind aus größeren Zusammenhängen und aus echten Anwendungen (besonders aus den handwerklichen Berufen) herausgerissene Episoden. Mit der Vorgabe von Daten und Fragestellung nehmen sie wichtige Aktivitäten vorweg, können aber von der Problemstellung her als Bausteine für echte Anwendungen angesehen werden.

Beispiel: Flächenberechnungen sind für viele Handwerker wichtig. Dem wird in Schulbüchern vielfach durch vereinfachte Aufgaben folgender Art Rechnung getragen:

"Berechne die Fläche der Giebelseite eines Hauses"



Der Aufgabe fehlt aber ein Sinnzusammenhang. (Wozu wird diese Fläche berechnet?) Ist ist aber Teil einer Kalkulationsaufgabe eines Malers für den Fassadenanstrich, so wird die Aufgabe in einen Zusammenhang gestellt.Sie wird dadurch aber wesentlich komplexer, da die anderen Hausseiten, eingelassene Fenster und Türen, mitberücksichtigt werden müssen. (vgl. VOLLRATH, 1975)
Ausgezeichnete Situationssammlungen für die Anwendung in der Sekundarstufe I erlernter Fertigkeiten im Prozentrechnen, Tabellenlesen, Berechnen von Flächen und Volumen, finden sich in Fachrechenbüchern für Zimmerer, Maurer, usw. Die Bearbeitung dieser Probleme erfordert den integrierten Einsatz dieser Fertigkeiten.

6) Jedem Lehrer bleibt es unbenommen, die in Schulbüchern aufgeführten Aufgaben nur als Anregungen zu verstehen und sie entsprechend den Anforderungen der Realität umzuformulieren. Anhand zweier Beispiele soll hier eine konstruktive Lehrbuchkritik vorgenommen werden:
In der Algebra II von H. TITZE (1971, S. 72) findet sich unter der Überschrift "Aufgaben aus verschiedenen Sachgebieten", folgende typische Aufgabe:
"Eine Schulklasse hatte eine Fahrt in einem Omnibus zum Preis von DM 180 gemietet. Da kurz vor der Fahrt 4 Schüler erkrankten und nicht teilnehmen konnten, erließ man ihnen den Fahrpreis und erhöhte den Anteil der übrigen um je DM 0,50. Wie viele Teilnehmer hatten sich ursprünglich für die Fahrt gemeldet, und welcher Fahrpreis war ursprünglich vorgesehen?"
Kritik: Die hier angegebene Fragestellung ist weltfremd! Wenn eine Klassenfahrt angesetzt wird, so ist die Anzahl der Schüler bekannt. Es wäre also in diesem Zusammenhang nur die Frage nach dem Einzelfahrtpreis interessant. Vielseitiger wäre diese Aufgabe, wenn sie als offene Problemsituation formuliert würde: "Wir planen einen Ausflug mit dem Bus". Im Zusammenhang mit einem Klassenausflug hat diese Situation sogar Ernstcharakter.

LAMBACHER/SCHWEIZER (1970, S. 145) stellt für den Algebraunterricht der 8. Klasse folgende Aufgabe:

"Ein in Ulm um 23.10 abgehender Schnellzug legt die 95 km lange Strecke bis Stuttgart in 1 1/4 Stunden zurück. Wann und wo überholt er einen um 23.40 Uhr von Göppingen nach Stuttgart abfahrenden Eilgüterzug, der in der Stunde 34 km zurücklegt? Entfernung Ulm-Göppingen beträgt 52 km."

Vom Standpunkt eines Unterrichts, der reale Probleme behandeln möchte, ergeben sich folgende Ansätze zur Kritik. Das Anpassen der Aufgabe an die Anforderungen der Realität kann durchaus im Gespräch mit den Schülern erfolgen. Hier wird auf blindes Anwenden des Verfahrens zum Schnitt zweier Geraden gesetzt; jedoch kann ein Zug einen anderen nur in Bahnhöfen überholen. Fahrende Züge müssen Sicherheitsabstände haben (ca. 3 Minuten)! Die realitätsnahe Fragestellung könnte heißen:

In welchem Bahnhof wird der Güterzug überholt? Die Beantwortung der Frage erfordert im Wesentlichen drei Schritte:

1. Ein Streckenplan wird besorgt. (Datenbeschaffung)
2. Der Originalaufgabe wird ein theoretischer Überholzeitpunkt entnommen, der keine Nebenbedingungen berücksichtigt.
3. Erfülle die Nebenbedingungen:
   Suche den Bahnhof, in den der Güterzug mindestens 3 Minuten vor dem theoretischen Überholzeitpunkt einfahren kann.

Stillschweigend wird noch vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Züge konstant bleibt.

(Anmerkung: Die Originalaufgabe wäre realistischer, wenn auf einer zweigleisigen Strecke zwei Züge entgegenlaufen. Derartige Fragen sind in Schulbüchern natürlich auch zu finden.)

In den eingekleideten Aufgaben werden einzelne Fertigkeiten vermittelt oder erarbeitet, die zur Bearbeitung des Projekts nötig sind. Dabei können unterschiedliche Schwierigkeiten erzeugt werden, indem einmal eine Fragestellung

explizit angegeben wird oder nicht, überflüssige Daten angegeben werden oder ein Unterschuß an Daten vorliegt usw. Fehlende Daten sollen vom Lehrer erfragt, oder selbständig besorgt werden. Die Bearbeitung eines Projekts wäre dann als integrierende Wiederholung zu verstehen.

Es soll hier unabhängig von der Diskusssion um Anwendungen noch eine besondere Rolle einiger eingekleideter Aufgaben angesprochen werden. VOLLRATH (1975) weist darauf hin, daß eingige außergewöhnlich motivierend seien und die Schüler auch außerhalb der Schule beschäftigen. POLLAK (1969) erwähnt die Vorliebe einiger Mathematiker, ernsthafte mathematische Probleme einzukleiden.

3. Zur Organisation der Anwendungen in der Schule

Nachdem in den beiden vorausgegangenen Abschnitten mathematikdidaktisch intern gearbeitet wurde, geht es nun darum, Vorschläge zu unterbreiten, wie die intendierten mathematischen Arbeitsweisen in der Schule realisiert werden können.

Im Grundsätzlichen erweist sich die Realisierung der Anwendung als ein Problem der Kooperation, das verschiedene Ebenen betrifft: Anwendung bedeutet immer, daß Ideen aus verschiedenen Bereichen in Wechselwirkung zueinander treten (kooperieren), was sicher ein Grund zu Untersuchungen im kognitiven Bereich wäre. Viel unmittelbarer hängt der Erfolg eines anwendungsorientierten Unterrichts von organisatorischen Randbedingungen ab, die einerseits durch administrative Vorgaben wie Lehrpläne, Stundentafeln, Prüfungsordnungen usw. geschaffen werden und andererseits von den Fähigkeiten der Lehrer, einen anwendungsorientierten Unterricht zu inszenieren. Unter diesem Gesichtspunkt kommt der Ausbildung der Lehrerstudenten, ihrer Einstellung zum Mathematikunterricht und der Entfaltung von Aktivitäten seitens der Lehrer außerhalb des Unterrichts besondere Bedeutung zu.

3.1 Unterrichtsformen und administrative Randbedingungen

Für den Unterricht ist es naheliegend die Mathematik mit anderen Schulfächern, aber auch außerschulischen Bereichen, in denen sich der Schüler auskennt, in Beziehung zu bringen. Um diese Beziehungen in ihrer Vielfalt und angemessenen erfassen zu können, sind unterschiedliche Unterrichtsformen sinnvoll, deren Realisierung z.T. ein Umdenken im schulorganisatorischen und administrativen Bereich erfordert.

Im folgenden werden fünf Bereiche bzw. Unterrichtsformen unterschieden, in denen Anwendungen der Mathematik betrieben werden, die jedoch in unterschiedlicher Form und Intensität die Kooperation erfordern:

a) Im Projektunterricht wird ein umfangreiches Problem bearbeitet und von verschiedenen Seiten beleuchtet. Verschiedene Lehrer nehmen gleichzeitig oder abgestimmt aufeinander am Unterricht teil. Die Thematik ist so gewählt, daß sich seine Bewältigung über mehrere Stunden hinweg erstreckt.

b) Die Erarbeitung integrierter Curricula erfordert das Zusammenwirken verschiedener Lehrer und Fachleute. In der Schule wird dieser Unterricht jedoch häufig von einem Lehrer gehalten.

c) Im koordinierten Mathematikunterricht und Realwissenschaftlichen Unterricht müssen die Fachlehrer die zeitliche Abfolge der Behandlung bestimmter Inhalte in ihrem Fach aufeinander abstimmen.

d) Anwendung von Mathematik im naturwissenschafltichen Unterricht.

e) Mathematisierung von Phänomenen aus den Realwissenschaften, dem täglichen Leben und Berufsleben im Mathematikunterricht.

Während bei den Formen a) - c) die Kooperation im persönlichen Kontakt von verschiedenen Lehrern vollzogen wird und teils sehr eng sein muß, ist es bei d) und e) nur ein Lehrer, der die Kooperation mathematischer und anderer Ideen vollzieht, wobei jedoch die Kooperation mit anderen Personen sehr hilfreich sein kann.

Die verschiedenen Unterrichtsformen sollen nun durch Beispiele näher erläutert werden und vor allem organisatorisch-administrative Maßnahmen erwähnt werden, die der jeweiligen Unterrichtsform förderlich sind.

ad a) Projektunterricht ist in den gegenwärtig gültigen Lehrplänen der Bundesrepublik Deutschland nicht vorgesehen und ist wegen der notwendigen schulorgani-

satorischen Maßnahmen, insbesondere auf der Sekundarstufe I und II, schwer zu verwirklichen.

(i) Ansätze zum Projektunterricht sind aus der Reformpädagogik nach dem 1. Weltkrieg bekannt. Ein "Wochenthema" wird von verschiedenen Seiten aus beleuchtet.

(ii) Außerhalb des üblichen Schulalltags werden gelegentlicht bei Schullandaufenthalten Projektthemen bearbeitet (z. B. "Die Talsperren im Sauerland", "Wir richten einen Spielplatz ein", "Eindeichungen auf der Halbinsel Eiderstedt").

Zur Erläuterung seien hier einige Fragestellungen oder Aktivitäten zu letzterem Thema angegeben, das verschiedene Schülergruppen arbeitsteilig bearbeiten: Kartographie der in den letzten 300 Jahren vorgenommenen Eindeichungen, Ermittlung der zugewonnenen Landfläche, Querschnitte der Deiche im Laufe der Jahrhunderte (physikalische Idee), Volumen der Deichaufschüttung (wieviele Pferdefuhrwerke mußten fahren?), Rückschläge und Naturkatastrophen, das Bauern- und Landarbeitertum in den Köogen usw.

(iii) Als Beispiel für den Unterricht auf der Sekundarstufe II würde sich das Beispiel über Schwankungen in Feldmeßpopulationen eignen. Es erfordert die Anwesenheit des Biologie- und Mathematiklehrers, da Mathematisierung und die Interpretation in komplexen biologischen Kontext wiederholt wechseln.

(iv) An der PH Ruhr in Dortmund haben Vertreter aus den Fächern des Fachbereichs VI das Projektthema "Wasser" für die Primarstufe bearbeitet. (Hinweise: SCHMIDKUNZ 1976, MÜLLER/WITTMANN 1977). Technologische, biologische, chemische, physikalische Phänomene werden betrachtet. Beim Einrichten eines Aquariums kommen besonders mathematische Ideen zur Anwendung.

Diese wenigen Beispiele zeigen bereits, daß die grobe Stundenorganisation beim Projektunterricht sehr unterschiedlich sein kann.

Bei (iv) ist daran gedacht, die im üblichen Stundenplan ausgewiesenen Sachunterrichtsstunden sowie teilweise die Mathematikstunden zu verwenden. Dies erfordert Absprachen zwischen zwei Lehrern und wirft keine administrativen Hindernisse auf. Erleichtert wird die Bearbeitung von Projektthemen in der Grundschule, da in der Schulpraxis das Fachlehrerprinzip trotz einer anderen Ausbildungspraxis noch nicht in vollem Umfang verwirklicht ist, so daß der einzelne Lehrer über eine gewisse Flexibilität bei der Verwendung der einzelnen Stunden in einer Klasse verfügt und Projekte in Personalunion leitet.
In der "Exotik" des Schullandheimes behandelte Themen unterliegen keinen administrativen Einschränkungen.
Bei anderen Beispielen (z. B. (iii)) ist jedoch daran gedacht, Eingriffe in den üblichen Stundenplan vorzunehmen, indem Projekttage arrangiert oder ganze Projektwochen freigehalten werden, was natürlich von seiten der Schulleitung eine Umverteilung der Lehrer auf die Klassen erfordert.

Es liegt auf der Hand, daß die Schüler über weite Strecken in Gruppenarbeit arbeitsteilig arbeiten, wobei spezielle Neigungen und das Spezialwissen einzelner Schüler (bestimmt z. B. durch Hobby oder Beruf der Eltern) genutzt wird, so daß es zu einer Bildung eines "Expertentums" kommen kann: Beschaffung von Daten und Berufsinterna, technologische Aspekte, historische Einbettung, Programmierung usw. Für die beteiligten Lehrer besteht die Schwierigkeit, die verschiedenen Schüleraktivitäten zu koordinieren und einen Informationsfluß zwischen den Gruppen zu ermöglichen, damit das Projekt nicht nur aus einer Addition von Einzelaktivitäten besteht.

Ein derartig organisierter Unterricht bietet verhältnismäßig viele Angriffsflächen, da vor allem formale Schulanforderungen schwer zu erfüllen sind. Es könnte ein starker Druck von seiten der Elternschaft entstehen. Die Bewertung der Schülerleistung ist schwer möglich, kurzfristig erreichbare Lernziele sind nicht ohne weiteres zu bestimmen oder abtestbar, zumindest nicht für alle Schüler. Somit können auf der SII keine Punkte für das Abiturzeugnis gesammelt werden, was für die Zulassung zum Hochschulstudium bedeutsam ist und wegen der Numerus-clausus-Fächer an Schärfe gewinnt. Voraussetzung für den Projektunterricht, als einer turnusmäßig zu betreibenden Unterrichtsform, ist eine explizite Erwähnung im Lehrplan.

ad b) Integrierte Curricula werden beim gegenwärtigen Stand der didaktischen Diskussion nur im Primarbereich erörtert und als sinnvoll angesehen. Als alleinige Unterrichtsform kommen sie für den Sekundarbereich nicht in Betracht, da sie die Spezialisierung der Wissenschaften nicht in genügendem Maße verwirklichen können und an die Fachkompetenz des Lehrers zu hohe Anforderungen gestellt werden. Jedoch muß auch im Sekundarbereich für den Zusammenhang der Fächer durch andere Maßnahmen gesorgt werden, wie in a), c) - e).

(i) In der Grundschule wird das Fach Sachunterricht erteilt. Es wird von einem Lehrer unterrichtet und es enthält Inhalte aus der Physik, Chemie, Biologie und verschiedenen anderen Bereichen. Oberstes Lernziel ist, dem Kind beim Zurechtfinden in der Umwelt zu helfen. In dem Unterricht wird reger Gebrauch von den Grundrechenarten, Tabellen und graphischen Darstellungen gemacht.
Eine systematische Zusammenarbeit mit dem Mathematikunterricht wird jedoch in Lehrplänen nicht

verlangt und bleibt den einzelnen Lehrern an der Schule überlassen.

(ii) Im angelsächsischen Sprachraum sind u.a. die naturwissenschaftlichen Curricula COPES und "Science-A process approach" für die Klassen 1-6 entwickelt worden. In reichhaltiger Weise wird auch die "Neue Mathematik" verwendet. Verschiedene mathematische Vorbereitungskurse sind in das Curriculum eingearbeitet. Von den Lehrern werden die Curricula als schwierig betrachtet; u.a. wegen der starken Mathematisierung der Naturwissenschaften.

Von der schulorganisatorischen Seite her liegen hier keine Schwierigkeiten vor, da entsprechende Lehrpläne, Schulbücher vorliegen und das Fach im Stundenplan entsprechend ausgewiesen ist.

ad c) Unter einem zwischen Mathematik und anderen Fächern koordinierten Unterricht verstehe ich einen Unterricht, bei dem die betroffenen Fächer in ihrer Selbständigkeit erhalten bleiben (was organisatorisch am Stundenplan erkennbar wird, da die Fächer in getrennten Stunden unterrichtet werden), jedoch zeitliche Abstimmungen bezüglich der vermittelten Inhalte vorgenommen werden.

Es ist sinnvoll, zwei Stufen der Koordination zu unterscheiden:
Zunächst eine grobe Koordination, wo langfristige Absprachen getroffen sind, die größere Wissensgebiete betreffen und bei denen oft die Rolle der Mathematik als Hilfsmittel deutlich wird (z. B. Behandlung der Trigonometrie in der Klasse 10; Verwendung des Kalküls im Physikunterricht der Sekundarstufe II). Diese Form der Koordination erfordert zwischen beteiligten Lehrern keinen großen Aufwand an Kommunikation, da die Durch-

führung in Lehrplänen vorweggenommen ist. Ein weiteres Beispiel für eine gezielte und durch die Lehrplankommissionen von Mathematik und Physik arrangierte Koordination ist im gymnasialen Lehrplan von 1971 in Baden-Württemberg angestrebt: Auf der 11. Klasse des Gymnasiums soll der Mathematikunterricht - entgegen bisheriger Praxis - mit einer propädeutischen Behandlung der 1. Ableitung und Integration von quadratischen und linearen Funktionen beginnen, um dadurch ein "mathematisches Hilfsmittel für den Physikunterricht bereitzustellen", der darauf zunächst in den Mechanikkursen zurückgreift.
Eine derartige vom Lehrplan herangetragene Kooperation ist äußerst selten.

Weitere in Lehrplänen nicht vorgesehene Kooperationsvorhaben wären die Lektürenmathematisch-philosophischer Texte (z. B. HARDY 1969, GRIFFITH 1966) im Englischunterricht, die sich an vorausgegangene Diskussionen im Mathematikunterricht über Anwendungen und Reine Mathematik anschließen könnten.

Eine Feinkoordination einzelner Unterrichtsstunden scheint gelegentlich sinnvoll. Es erfordert eine enge Kommunikation der beteiligten Lehrer und ist durch zeitliche Vorgaben in Lehrplänen kaum zu steuern. Es erfordert also die Privatinitiative der Lehrer und bezieht sich nur auf eine oder wenige Stunden.
Ich denke dabei an Beispiele folgender Art:

(i) Im Biolgieunterricht der 6. Klasse wird die Morphogenese des Maikäfers behandelt. Die damit verbundenen oft 4-jährigen Schwankungen in Maikäferpopulationen können durch einfache Modellierung im Mathematikuntericht quantitativ erfaßt werden. Die Unzulänglichkeiten, die diese Mathematisierung beinhaltet, kann vom Mathematiklehrer überblickt werden, so daß

keine biologischen Überinterpretationen entstehen und somit auch nicht zwei Fachlehrer gleichzeitig anwesend sein müssen.

(ii) Ein Chemielehrer führt ein Experiment im Fremdsprachenunterricht (z. B. Englisch) durch. Dieses Schauexperiment wird von den Schülern beschrieben und anschließend im Chemieunterricht weiterverwendet.

(iii) Im Anschluß an die (oder überlappend mit der) Behandlung verschiedener chemischer Reaktionstypen eignet sich für den Mathematikunterricht eine Fortführung des Themas, als "theoretische Reaktionskinetik", in deren Zentrum die Behandlung verschiedener Differentialgleichungen 1. Ordnung steht.

Einer verbreiteten Koordination verschiedener Unterrichtsstunden stehen aus administrativen Gründen vor allem zwei Hemmnisse entgegen.

- Die Lehrpläne sind nicht darauf eingerichtet trotz gegenseitiger Beteuerungen und Appellen in den Präambeln. Der zu koordinierende Unterricht wird nicht an Themen oder Inhalten fixiert.

  Interessant ist auch das Schicksal der oben erwähnten Propädeutik zur Infinitesimalrechnung: Ihr war kein langer Erfolg beschwert. Zunächst wurde bei der nächsten Lehrplanrevision die Propädeutik aufgegeben, und zweitens haben sich Schulbücher auch gar nicht darauf eingestellt, so daß die Lehrer mit der ungewohnten Propädeutik überfordert waren.

- Auf der Sekundarstufe II verringert das Kurssystem mit seinen vielfältigen Wahlmöglichkeiten den gemeinsamen Durchschnitt des Wissens und der Interessen

der Schüler, so daß Koordination stark erschwert wird.

Trotz dieser administrativen Hemmnisse scheint mir beim augenblicklichen Stand der Schulsituation ein koordinierter Unterricht streckenweise möglich. Zunächst wird die Zusammenarbeit der Fächer in den Präambeln fast aller Lehrpläne der letzten 75 Jahre gefordert, jedoch sind die Randbedingungen so wenig förderlich und zwingend, daß es zum anderen klar ist, das Koordination nur durch die persönliche Initiative einzelner Lehrer zustande kommt.

ad d) Die traditionellen Anwendungen der Mathematik in dem naturwissenschaftlichen Unterricht sind hinlänglich bekannt, wie beispielsweise das Dreisatzrechnen in der Stöchiometrie, die Verwendung linearer, quadratischer und Exponentialfunktionen sowie ihrer Umkehrfunktionen im Chemie- und Physikunterricht und der Ableitungs- und Integrationskalkül. Zum augenblicklichen Zeitpunkt scheint aber die intensive Nutzung von Exponentialfunktionen, Logarithmus, Wurzelfunktion in den Naturwissenschaften gefährdet, da Mathematikgrundkurse diese Begriffe nicht intensiv genug und genügend anwendungsbereit behandeln. Mathematische Gebiete wie Stochastik, "Mengenlehre", Graphentheorie, Kombinatorik kommen sehr selten zur Anwendung.
Einige Beispiele aus der Schulbuchliteratur sind:

(i) Das Projekt "Science a process approach" nutzt für die Vererbungslehre im 6. Schuljahr einfache Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

(ii) Verschiedene Biologieschulbücher für den Unterricht der 10. Klasse geben eine mathematische Beschreibung der drei Mendelschen Gesetze.

Vielfältige Anregungen kommen aus der didaktischen Literatur:

(iii) Anwendungen der Graphentheorie im Chemieunterricht werden in BECK (1977 b), DAHLMANN (1977), FUCKERT (1978) erörtert.

(iv) Von Mengen, Relationen und Abbildungen macht ROUVERAY (1974) intensiven Gebrauch. Die einfacheren Beispiele eignen sich besonders für den Unterricht auf der Sekundarstufe I.

(v) Stochastische Ideen vor allem Simulationen betrachtet MEYER (1975) für biologische Fragen und HARSCH (1977) für chemische Probleme.

(vi) Trend: Betrachtet man Publikationen in Zeitschriften (z. B. Int. Journal Math. Educ. Sci. Technology) zu Anwendungen von Mathematik im Chemie-, Biologie- und Physikunterricht der Sekundarstufe I sowie dem Universitätsunterricht, so spielt der Computereinsatz eine beträchtliche Rolle; jedoch spiegeln Schulbücher dies nicht wieder. Dem Taschenrechner kommt dort eine größere Bedeutung zu.

Probleme für eine breitere Beachtung der Mathematik in den Naturwissenschaften scheinen mir vor allem in einem mangelnden Wissen der Naturwissenschaftler über neuere Schulmathematik und ihrer ungenügenden Berücksichtigung der Anwendungen in Schulbüchern zu liegen. Hinzu kommt, daß Mathematik im Mathematikunterricht nicht genügend anwendungsbereit gelernt wird.
Beide Probleme können durch eine verstärkte Kommunikation der Lehrer untereinander gemildert werden. In 3.2 werden wir auf dieses Problem zurückkommen.

ad e) Werden die verschiedenen Unterrichtsformen a) - d) in Betracht gezogen, so eignen sich besonders für die Anwendungen im Mathematikunterricht solche Phänomene,

- deren situativer Hintergrund schnell erfaßbar ist (short modelling problems),
- die in Textaufgaben Ausschnitte der Realität darstellen und teilweise vormathematisiert sind,
- die in anderen Fächern nicht ihren natürlichen Platz haben.

Sicher muß diese Zuordnung von Situationen zum Mathematikunterricht nuanciert betrachtet werden. Sie hat nur einen Sinn, wenn andere Unterrichtsformen funktionieren.Keinesfalls darf beim Schüler der Eindruck von einer Bagatellisierung der Anwendungen entstehen. In bezug zu den Schulstufen könnten auch die Akzente verschoben sein, wobei in der Primarstufe ein mehr ganzheitlicher Mathematikunterricht mit einer starken Betonung des Situationsaspekts betrieben wird. Grundsätzlich sind die Grenzen zwischen den Unterrichtsformen und der Zuordnung von Problemstellungen und der Art ihrer Behandlung fließend.

Beispiele:

(i) Mehrere Beispiele für die Primarstufe sind in MÜLLER/WITTMANN (1977) zusammengestellt. Besonders zu erwähnen ist die Untersuchung von Tetraedermilchtüten sowie das Geschehen um die Einrichtung eines Aquariums.

(ii) WINTER (1972 a) behandelt die Frage "Sind die großen Kinder auch die schweren?" Bei dieser Einheit kommen statistische Aktivitäten und solche der "Mengenlehre" zur Anwendung. An

anderer Stelle beschreibt WINTER (1976 c) den Entwurf einer Ampelanlage, bei der Graphen zur Anwendung gelangen.

(iii) Einfache Situationen wie Auslaufvorgänge aus einem Wasserbehälter zur Einführung quadratischer Gleichungen, Papierformate zur Einführung geometrischer Folgen, radioaktiver Zerfall zur Einführung von Exponentialfunktionen oder Wachstumsvorgänge bei Blättern zur Einführung von Strahlensätzen, sind reale aber überschaubare Situationen, deren Behandlung für die SI und SII geeignet sind. Ihre Mathematisierung ist kanonisch und garantiert den Zugang zu einem bestimmten mathematischen Inhalt, ohne daß künstliche Situationen herangezogen werden müssen.

Die didaktische Literatur enthält eine Vielzahl von Vorschlägen zur Mathematisierung von Problemen mit einem umfangreichen situativen Hintergrund.
Die Behandlung derartiger Problemsituationen stößt auf Hindernisse:

- Die Schulbauten enthalten meist kein mathematisches Labor, entsprechend den physikalischen, chemischen oder biologischen, in denen entsprechend entwickelte Materialien aufbewahrt werden könnten.

- Die Erfüllung des vollgestopften Lehrplans läßt kaum den Blick über enge Grenzen der Mathematik hinaus zu.

- Dem Lehrer unterstützende Materialien fehlen weitgehend.

- Der Zersplitterungseffekt des Kurssystems ist schon an anderer Stelle angesprochen worden.

- Umfangreiche Situationen sind in Lehrplänen nicht vorgesehen (aber auch nicht ausgeschlossen).

- In Prüfungen wird die Fähigkeit des Mathematisierens kaum gefragt. Besonders ein SII-Lehrer gerät hier in Konflikte.

Die aus der Person des Lehrers resultierenden Einschränkungen werden im nächsten Abschnitt angesprochen.

3.2. Ausbildung und Weiterbildung der Lehrer

Im Gegensatz zum vorausgegangenen Absatz wird nun die Person des Lehrers und seine Aktivitäten im Mittelpunkt der Überlegungen stehen. Die Verbreitung neuer Ideen im Unterricht hängt maßgeblich von der Vorbereitung der Lehrer auf diese Ideen und seinen Aktivitäten außerhalb des Unterrichts ab. Ich möchte daher einige Maßnahmen zur Lehrerausbildung zusammenstellen, die mir geeignet scheinen, den Lehrer in der Schule zur Kooperation zu befähigen und schließlich Aktivitäten aufzeigen, die der Lehrer während des Schulalltags zur Pflege der Anwendungen außerhalb des Unterrichtsbetreiben könnte, um dadurch einen anwendungsorientierten Unterricht mit Leben zu erfüllen.

Ausbildung der Studenten

In den vergangenen Jahrzehnten hat es verschiedene Ansätze zur Reform des Mathematikunterrichts gegeben. Dabei fällt auf, daß diejenigen Reformziele, die sich auf die mathematischen Inhalte beziehen, überwiegend verwirklicht wurden, während diejenigen Ziele, die eine veränderte Einstellung des Lehrers zum Unterricht und differenzierte Methoden erfordern, sich in viel geringerem Maße durchgesetzt haben.

Am Beispiel der Meraner Reform läßt sich dies belegen.
Die Meraner Reform verfolgte zwei Hauptziele:

1. Der Unterricht soll am Funktionsbegriff ausgerichtet sein, und die Infinitesimalrechnung soll zu einem wesentlichen

Bestandteil des Oberstufenunterrichts werden.

2. Die Anwendungen der Mathematik und die Beziehungen zu den Naturwissenschaften sollen, wo irgend möglich, gefördert werden.

Betrachtet man die Verwirklichung der Ziele, so ist in den folgenden Jahrzehnten das 1. Ziel erreicht worden, während das 2. Ziel nach einigen Anfangserfolgen nie in nennenswertem Umfang verwirklicht wurde.
Gründe hierfür liegen auf der Hand: Jedem Student war die Analysis ein geläufiges Gebiet, so daß dem späteren Lehrer hieraus keine Schwierigkeiten erwuchsen; jedoch war eine Einstellung zur Mathematik, die ihre Anwendungen als wesentlichen Bestandteil sah, an den deutschen Universitäten nicht verbreitet. F. KLEIN kritisierte die Lehre an den Universitäten ja wegen ihres "formalen Betriebes". KLEIN selber unternimmt einige Anstrebungen, um die Lehrer und Studenten auf die Reformziele vorzubereiten. Für die Studenten hielt er die berühmte Vorlesung "Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus". Die Anwendungen beziehen sich dort vorwiegend auf die Physik und sind auch nicht sehr zahlreich. Für weitere Anwendungen wird gelegentlich auf Literatur für die berufsorientierten "mittleren Fachschulen" (Ingenieurschulen) verwiesen.

Um bereits praktizierende Lehrer mit den Zielen der "Meraner Reform" in intensiven Kontakt zu bringen, wurden Lehrerfortbildungskurse - die bekannten Göttinger Osterkurse - eingerichtet. Sie standen unter der gemeinsamen Leitung von KLEIN und dem Physiker RIECKE.
Was den Gesichtspunkt der Anwendungen betrifft, so werden verschiedene Vorträge über Anwendungen in der Physik von Fachwissenschaftlern gehalten, jedoch nie in einem unterrichtsnahen Stil. Es handelt sich darum,wie KLEIN betont, "den Herren von der Schule Material entgegenzubringen, welches die Wissenschaft für sie bereitgestellt hat, nicht damit sie dasselbe unmittelbar in ihren Unterricht einfügen,

sondern damit sie selbst imstande sind, ihr Lehrgebiet lebendiger und unter allgemeineren Gesichtspunkten zu erfassen" (KLEIN/RIECKE, 1904).

Meines Erachtens war bei diesen Vorhaben der Anspruch an die Studenten und Lehrer zu hoch gestellt, als daß ein nachhaltiger Erfolg bei der Beachtung der Anwendungen in der Schule hätte erreicht werden können. Der Lehrer war schließlich in der Schule auf sich allein gestellt, zumal er von den Schulbüchern und kurzgefaßten Lehrplänen auch keine besondere Hilfe erhielt.
Wenn wir es heute wieder mit Anwendungen und Kooperationen ernst meinen, so muß die Didaktik ihre Gedanken in viel stärkerem Maße explizit machen, den Lehrer mit praktikablen Unterrichtsbeispielen und "praktikablen Theorien" dazu versorgen. Vor allem aber müssen wir die Kooperation praktizieren, damit sie der Student von seinem ersten Semester an selbst miterlebt und mitgestalten kann.

Die Idee für eine Studentenausbildung ist also, daß der zukünftige Lehrer die Kooperation bevor er Unterricht erteilt selbst erlebt hat, und zwar bei anderen Personen (Hochschullehrern) und selbst vollzogen hat, in einem Rahmen, in dem Hilfestellungen möglich sind und wo nicht dauernd (jedoch gelegentlich) die erschwerten Bedingungen der Realisierung im Schulunterricht auftreten. Dies kann m. E. am besten in einem wohlabgestimmten Kanon von Vorlesungen, Seminaten, Übungen, Schulpraktika und eigener Betätigung in der Umwelt geschehen.

Ich möchte nun die Anstrengungen beschreiben, wie sie z. T. an der Pädagogischen Hochschule in Dortmund im Fach Mathematik in bezug auf die Kooperation unternommen werden.

Alle Maßnahmen passen sich in bestehende Studienpläne ein, erfordern also keine neuen administrativen Maßnahmen; es wird lediglich in einem neuen Geist gearbeitet. Die folgenden Vorschläge sind realistisch; sicherlich sind radikalere Überlegungen möglich, die vielleicht aber auch weniger

praktikabel sind.

Vorlesungen:

Traditionell entfaltet der Student an deutschen Hochschulen in den Anfangssemestern seine Hauptaktivitäten in den sogenannten Grundvorlesungen auf den Gebieten Algebra, Analysis und Geometrie (welcher Art auch immer). Diese Vorlesungen werden zu einem überwältigenden Teil in axiomatisch deduktiver Weise, innermathematischen Gesichtspunkten folgend, gehalten. Beziehungen zu anderen Wissenschaften werden kaum erfaßt. Um diesem Defizit zu begegnen, eignen sich für Grundvorlesungen besonders Probleme aus Nachbarwissenschaften, deren situativer Hintergrund schnell zu erfassen ist (short modelling problems).

Beispiele: [1)]

- physikalische Experimente in der Vorlesung die den gesamten Modellbildungsprozeß erfordern, z. B. Pendelexperiment, Auslaufvorgänge aus Wasserbehältern (Differenzialgleichungen, Differenzengleichungen)

- Probleme aus der Navigation (Elementargeometrie); der Schlagschatten eines Stabes an verschiedenen Stellen auf der Erde (Kegelschnitte)

- Symmetrieprobleme aus der Chemie im Zusammenhang mit optischer Aktivität oder Kristallgittern (Symmetriegruppen)

- Kodierung von Nachrichten (lineare Transformation) usw.

---

1) Reichhaltiges Beispielmaterial haben für verschiedene mathematische Disziplinen MAKI/THOMPSON (1973), KEMENY et.al. (1963) zusammengestellt.

Diese Probleme können von dem Mathematikdozenten allein vorgetragen und vorgeführt werden. Es bietet sich aber auch an, hier Studenten mitwirken zu lassen, deren zweites Fach Physik oder Chemie ist oder deren Hobby sie zu Experten für bestimmte Situationen macht. Somit sind Studenten von Anfang an Aktivitäten beteiligt, die über die Reine Mathematik hinausgehen. Die verwendeten Situationen stehen am Anfang von Kursen. An ihnen soll sich Mathematik entzünden.
In den mit diesen Vorlesungen gekoppelten Übungen werden u. a. die entwickelten mathematischen Instrumente in verschiedenen Situationen angewendet.

Über diese Grundvorlesungen hinaus gehen Spezialvorlesungen die als historische Fallstudien betrachtet werden können.

Beispiele:

- Genese einer mathematischen Disziplin
  (Welche Probleme haben die Analysis beeinflußt?)

- Beispiele aus dem Werk bedeutender Mathematiker
  (ARCHIMEDES, GAUSS, die Zusammenarbeit von STURM und LIOUVILLE etc.)

- Die Entwicklung von naturwissenschaftlichen Problemen
  (Die mathematische Beschreibung der Himmelsdynamik)

Seminare:

Verschiedene Formen von Seminaren sind denkbar.

a) Zwei Dozenten, ein Mathematiker und ein Chemiker (Physiker, Biologe) leiten das Seminar.
   Mit den Studenten zusammen werden Fragen folgender Art untersucht:

   - Welche mathematischen Inhalte sind im Chemieunterricht hilfreich? Werden diese Inhalte zur rechten Zeit im Mathematikunterricht gelehrt? Wie kann man diese In-

Inhalte lernen, damit sie anwendungsbereit sind?

- Welche chemischen Probleme eignen sich besonders zur Motivierung und Entwicklung mathematischer Aktivitäten, Fähigkeiten, Inhalte?

- Suche nach eigenen originellen Anwendungen der Mathematik im Chemieunterricht.

b) Mathematisierung naturwissenschaftlicher Teilgebiete (z. B. mathematische Modelle in der Populationsdynamik). Die Studenten referieren aus der Fachliteratur. Mathematisch anspruchsvolle Themen werden bevorzugt.
Zum Teil werden eigene biologische Experimente vorgenommen sowie reale Daten von Fremdexperimenten und Statistiken ausgewertet.
Auch hier sind zwei Dozenten aus verschiedenen Fächern anwesend.

c) Eine dritte Seminarform dient dazu, dem Student die Möglichkeit zu geben - auf sich gestellt - Situationen aus dem Alltag und Berufsleben auf ihre Mathematisierbarkeit hin zu untersuchen. Wichtige Anstrengungen bestehen darin, Informationen über die Situation zu sammeln aus Statistiken, Zeitungen, Prospekten, durch Gespräche mit Berufstätigen usw. Bei dieser Seminarform geht es vor allem darum,daß der Student durch eigenes Tun Mathematisierungen mit ihren vielfältigen erforderlichen Aktivitäten am eigenen Leibe verspürt.

Allen Seminarformen ist gemeinsam, daß auch allgemeinere Fragestellungen zur Diskussion stehen, wie: der Prozeß der Modellbildung, echte und unechte Anwendungen, die Rolle des Computers usw. Viele Themen sollten die Studenten partnerschaftlich erarbeiten, so daß auch die Zusammenarbeit zwischen Personen während des Studiums geübt wird.

Schulpraktika:

Bei den bisherigen Veranstaltungsformen Vorlesung, Übung und Seminar hat der Student die Gelegenheit gehabt, die Kooperation selbst zu praktizieren und bei anderen zu beobachten. In Schulpraktika bekommt der Student die Möglichkeit, seine gewonnenen Erfahrungen im Unterricht in der Schule während einer oder mehrerer Stunden zu erproben.

Es scheint mir wichtig, daß der zukünftige Lehrer seine ersten Schulerfahrungen in einem kooperativen Unterricht, der zweifellos schwieriger abzuhalten ist als ein isolierter Fachunterricht, nicht unter der Last des Schulalltags im vollem Lehrdeputat sammelt, sondern mit der Möglichkeit zur Konzentration auf einen kurzen Kurs und der Hilfestellung durch Dozenten.

Aktivitäten der Lehrer im Schulalltag

Ungeachtet möglicher günstiger Voraussetzungen für die Kooperation, die in entsprechenden Lehrplänen, schulorganisatorischen Maßnahmen, Studium usw. liegen können, hängt die Verwirklichung einer angemessenen Berücksichtigung der Anwendungen im Unterricht von der Einstellung der Lehrer und ihren Aktivitäten im Schulalltag ab. Ich möchte jetzt vorwiegend solche Aktivitäten ansprechen, die außerhalb des eigentlichen Unterrichts in und außerhalb der Schule und überwiegend nicht in organisierten Lehrerfortbildungskursen ablaufen.

Kontakte zwischen den Lehrern: Verschiedene Unterrichtsformen erfordern einen engen Kontakt der Lehrer untereinander, die z. T. mit weitreichenden Absprachen enden müssen. Andererseits können oft kleine Hinweise schon nützlich sein.

- Hinderlich für solche Kontakte ist die Aufteilung der Lehrerschaft in verschiedene "Departments". Spontane

Gespräche zwischen dem Physiklehrer und dem Mathematiklehrer sind kaum möglich, da der eine seine Pausen überwiegend in der Gerätesammlung verbringt und jener im allgemeinen Lehrerzimmer.

- Einschneidener kann sich die Furcht auswirken, daß ein Lehrer (natürliche) Inkompetenzen auf dem Gebiet des anderen eingestehen muß. Vor allem begegnen Naturwissenschaftler der "Neuen Mathematik" vielfach mit äußerstem Mißtrauen, so daß hier manche Vorurteile abgebaut werden müssen. Neuere mathematische Sprechweisen, Notationen usw. erweisen sich geradezu als Kommunikationsbarrieren, da sie der Naturwissenschaftler weder als Schüler noch als Student kennengelernt hat. Diese Kommunikationsbarriere setzt sich auf der Schülerebene fort, indem es ihm schwergemacht wird, hinter den verschiedenen Notationen dieselbe Mathematik zu erkennen.

  In kleinen Schritten können solche Barrieren abgebaut werden, indem beispielsweise der Naturwissenschaftler dem Mathematiklehrer eine Kopie einer Klassenarbeit überläßt, aus der hervorgeht, wie z. B. im Chemieunterricht Mathematik verwendet wird. Umgekehrt kann der Naturwissenschaftler dem Mathematiklehrer Hinweise zu Anwendungsgebieten der Mathematik geben.

  Hinzu kommt, daß viele Naturwissenschaftler nicht mit mathematischen Inhalten aus Topologie, Wahrscheinlichkeitsrechnung oder dem Computereinsatz vertraut sind, wie sie heute der Mathematikunterricht anbietet. Von seiten des Mathematiklehrers wirkt sich eine Einstellung hemmend aus, die in der Beachtung der Anliegen anderer Fächer nur einen Faktor sehen, der im Mathematikunterricht unnötige "Turbulenzen" auslösen kann.

Lehrerfortbildung: Zu den letztgenannten Problemen bietet sich in der Lehrerfortbildung ein breites Betätigungsfeld an. Beipielsweise wurden bei Lehrerfortbildungen der Gesellschaft deutscher Chemiker an der PH Ruhr, Chemielehrer mit Inhalten aus der Stochastik und elementaren Graphentheorie konfrontiert, sowie in den Gebrauch eines Tischrechners eingewiesen. Jedoch werden die maximalen Teilnehmerzahlen der Lehrer an diesen Lehrgängen nicht voll ausgeschöpft.

Ausstellungen: Über die Anwendungen im Unterricht hinaus können in Schaukästen kleine Ausstellungen zusammengestellt werden, aus denen die Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften hervorgeht (WEBB, 1975).

Geräte: Das Zusammenwirken der Lehrer sollte sich nicht nur auf geistiger Ebene bewegen,vielmehr sollte auch ein materialer Fluß entstehen. Dem Mathematiklehrer müssen die Gerätesammlungen anderer Fächer zugänglich sein. Genauso-wenig darf der Mathematiklehrer auf "seinem" Computer sitzen, der ja gerade seine Schlagkraft bei der Simulation naturwissenschaftlicher Phänomene beweist.

Bis hierhin haben sich meine Bemerkungen auf die Kontakte innerhalb der Schule bezogen. Stellenweise muß jedoch der Mathematiklehrer auf sich gestellt Anwendungen betreiben und Kontakte und Möglichkeiten außerhalb der Schule suchen. Drei Punkte möchte ich ansprechen.

Kontakte mit Anwendern: Anregungen für authentische Anwendungen ergeben sich aus Kontakten mit Personen, die die Mathematik innerhalb ihrer Berufswelt anwenden. Für den Betrieb auf der Sekundarstufe I sind besonders Kalkulationsverfahren, wie sie Bauhandwerker benutzen, ergiebig, da innerhalb eines Problems mathematische Fertigkeiten aus der Geometrie (Flächenberechnung, Volumen, Anwendung des Pythagoras oder Winkelfunktionen) und Algebra (Prozentrechnung usw.) zur Anwendung kommen. Persönliche Kontakte sind hier wichtig, damit Originalmaterialien (Bauzeichnung usw.)

in den Unterricht eingebracht werden können.

Selbst Kontakte zu forschenden Naturwissenschaftlern erweisen sich (z. T. überraschend) als ergiebig für die Anwendungen elementarer Mathematik. Beispielsweise wird die Flächenformel $\sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i-1} - x_{i-1} y_i)$ für geschlossene Polygonzüge bei der Untersuchung von Gewebeschnitten am glomus caroticum (Max Planck Institut, Dortmund) verwendet, und in ähnlicher Weise wird die Formel im Geologischen Institut in Bochum eingesetzt, um anhand von Gesteinsschliffen den prozentualen Anteil von Quarz in vulkanischem Gestein zu ermitteln.

Wache Beobachtung des Alltagslebens: Eine Auftrag der allgemeinbildenden Schule besteht darin, den Schüler zur Bewältigung und kritische Beobachtung von Alltagssituationen zu erziehen. Viele dieser Situationen bekommen ihre Bedeutung durch ihre Aktualtität oder ihren lokalen Charakter und sind somit in Schulbüchern gar nicht wiederzugeben.

Beispiele hierfür sind:

- J. Carter verkündet im Fernsehen sein Energieprogramm. Die Zuwachsrate im Energieverbrauch von jährlich ca. 6% soll auf 2 % gesenkt werden.

- Die "Ruhrnachrichten" veröffentlichen eine Statistik über den in den letzten 30 Jahren abgeführten Müll. (Überexponentielles Wachstum!)

- In einem Drogeriemarkt sieht der Lehrer ein Preisschild für Pampers: 60er Packung DM 22.90
  12er Packung DM 4.45

  (Welch ein Trick!)

- Die Bundesbahn gibt einen Prospekt über Gruppenkarten heraus (MÜLLER/WITTMANN , 1977).

- Untersuchung von Bodenpreisen anhand des Immobilienteils einer örtlichen Zeitung. (KANJI , 1975).

- Nach der Urlaubsfahrt: Die Verkehrsregelung im Mont - Blanc - Tunnel (BECK, 1977 c).

Die Verwendung aktueller Probleme erfordert oft einen Lehrer, der in der Lage ist, losgelöst vom Schulbuch, auf sich gestellt und ohne große Unterrichtsvorbereitung seinen Unterricht durchzuführen.

Beispielsammlung: Viele aus den vorigen Kontakten und Beobachtungen gewonnenen Situationen sind es wert, in einer schuleigenen Beispielsammlung dokumentiert zu werden, wobei Materialien, Organisationsformen, Fragestellungen, mathematischer Hintergrund, möglicher Zeitaufwand usw. vermerkt sind. Eine derartige Sammlung kann durch fertige Materialien ergänzt werden. Es handelt sich dabei dann um Beispiele, die von einer bestimmten Allgemeinheit sind, wie einige "Modules of work" des Nuffield Mathematics Teaching project oder Auswertungen von Aufsätzen aus Lehrerzeitschriften (z. B. "Bicycle mathematics" (NEWTON, 1978) usw.). Das Führen einer derartigen Sammlung erfordert großen Aufwand, insbesondere dann, wenn auch andere Lehrer davon profitieren sollen.

Kapitel IV

KONSTRUKTION VON UNTERRICHTSBEISPIELEN

Das abschließende Kapitel IV und das vorausgegangene Kapitel stehen in enger Beziehung zueinander.
Die ausführlich dargestellten Beispiele illustrieren die Elemente der praktischen Unterrichtslehre des Kapitel III und umgekehrt hat eine Analyse der entwickelten Beispiele zur Anreicherung und Ausformulierung der praktischen Unterrichtslehre beigetragen und zum Teil auch auf Kapitel II gewirkt.

Die einzelnen Beispiele sind in sich lesbar. Sie enthalten auch "Splitter" einer didaktischen Theorie die spezifische Aspekte des einzelnen Beispiels ansprechen und so das Beispiel in einen übergeordneten Rahmen stellen, wie er in den vorgegangenen Kapiteln entwickelt wurde. Die Beispiele selber sind so ausgewählt, daß sie wesentliche Punkte unserer Konzeption eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts ansprechen. Zunächst werden mit der Biologie, Chemie, Physik die natürlichen Nachbarfächer des Mathematikunterrichts angesprochen; darüber hinausgehend die Mathematisierung einer Situation aus dem Alltag. Alle Beispiele erfordern den Prozess des Modellbildens in seiner Gesamtheit; jedoch werden die einzelnen Prozesschritte im einzelnen nicht als solche herausgestellt. Die Vielfalt der Problemstellungen innerhalb eines Beispiels bewirkt, daß die Beispiele nicht in kurzer Zeit behandelt werden können, sondern ein Gegengewicht zu eingekleideten Aufgaben darstellen,die im allgemeinen in kurzer Zeit "abgehandelt" werden.

Ein besonderes Anliegen war es, Beispiele zu konstruieren in denen deutlich die drei Formen des Mathematisierens hervortreten. Selbstverständlich können die Beispiele nicht die volle Aspektvielfalt eines anwendungsorientierten oder gar eines ausge-

wogenen Mathematikunterrichts widerspiegeln; deshalb wird den Beispielen ein kurzer Abschnitt über die Auswahl von Problemsituationen vorausgestellt, bei dem einige Gesichtspunkte der Auswahl im Zusammenhang dargestellt sind.

1. Über die Auswahl von Problemsituationen

Die folgenden Bemerkungen sind ihrem Wesen nach Teil einer praktischen Unterrichtslehre. Zieldiskussionen werden hier nicht mehr geführt. Sie stehen implizit hinter den zusammengestellten Auswahlkriterien.
Der enge Bezug zur Konstruktion von Unterrichtsvorlagen liegt auf der Hand, sodaß einige Auswahlkriterien in diesem Kapitel IV zusammengestellt werden.
Die Auswahl von "treffenden" Problemsituationen ist für den Unterricht selber von großer Wichtigkeit, da die Vorgaben der Situation und ihre Eigendynamik in beträchtlichem Maße über die Realisierung der Vorstellungen von einem anwendungsbezogenen Unterricht entscheiden, wie er in den vorausgegangenen Kapiteln umrissen wurde.

Betrachtet man die Auswahlkriterien die von einzelnen Verfassern in Erwägung gezogen werden, so werden verschiedene Schwerpunktsetzungen deutlich. Einige der Auswahlkriterien stellen auf den ersten Blick Dichotomien dar. Berücksichtigt man jedoch die in Kap. III dargestellten Unterrichtsformen und die vorgesehenen Verkürzungen bei der Behandlung von Anwendungen, so wird durch die angegebenen Auswahlkriterien eher die gewünschte Vielfalt der Anwendungen im Unterricht sichergestellt.

Die Beachtung folgender Auswahlkriterien scheint mir wichtig:
Eine Hauptforderung ist, daß reale Problemsituationen aus dem Alltagsleben und aus den Realwissenschaften behandelt

werden sowie Problemsituationen häufig offen gestellt werden. Diese Forderung gewährleistet, daß der Prozess des Modellbildens in seiner Gesamtheit durchlaufen wird. Zu dieser Forderung können einige der folgenden Auswahlkriterien hinzukommen.

- Benötigt das Einleben des Schülers in die Situation einen größeren Zeitaufwand, so sollten aus der Situation Fragen unterschiedlicher Schwierigkeit herausgelöst werden können, die eine ganze Unterrichtseinheit steuern können. Die Fragen sollen einerseits zur Klärung der Situation beitragen andererseits zum Ausbau des mathematischen Wissens anregen.
- Liegt das Hauptziel des Unterrichts in der Klärung einer Situation, so sollte die anzuwendende Mathematik einfach und vertraut sein, damit die Diskussion nicht von der Mathematik dominiert wird.
- Für die Einführung eines neuen mathematischen Gebiets eignen sich besonders Situationen, die vom Schüler schnell überblickt werden. Die Komplexität der Situationen soll so angelegt sein, daß die Situation nicht trivial in dem Sinne ist, daß sie nur ein "Mäntelchen" für Rechenübungen angibt. Auf der anderen Seite soll die Situation nicht übertrieben komplex sein, sodaß mehrere Stunden vergehen bis sich der Schüler in die Situation eingelebt hat. Es geht in der Schule ja nicht darum Operations Research Spezialisten auszubilden.
- Der mit der Behandlung von offenen Situationen verbundene Zeitaufwand fordert, daß die Probleme auf substantielle Mathematik führen, die wiederum in verschiedenen Realitätsbereichen anwendbar ist.
- Bei Situationen aus dem Alltag sollen solche bevorzugt werden, die den Schüler unmittelbar betreffen und deren Bearbeitung sein Verhalten beeinflussen können. Der Schüler soll das Gefühl haben, als ob etwas von der Beantwortung der Frage abhängt und selbst in den "Genuß" seines mathematisierenden Tuns kommen können.

- Im Unterricht sollen auch Problemsituationen mathematisiert werden, die von einer allgemeinen aktuellen Bedeutung sind und in den öffentlichen Medien diskutiert werden. (z.B. Präsident Carter (USA) verkündet sein Energiesparprogramm; oder: Automobilkrise in der BRD (BOSCH/WITTMANN)). Ich weise hier nochmals darauf hin, daß die Einbeziehung der Aktualität in den Unterricht an den Lehrer besonders hohe Anforderungen stellt, die einen autonom handelnden Lehrer erfordert.
- Es sollen Problemsituationen behandelt werden, die gleichermaßen das Interesse des Lehrers und des Schülers auf sich ziehen.
- Innerhalb eines Schuljahres sollen Problemsituationen behandelt werden, deren Bearbeitung durch Gruppen geschehen kann, die verschiedene Aufgaben verfolgen und das Spezialwissen einzelner Schüler berücksichtigen. Die Einsicht in das gesamte Projekt muß jedoch jedem Schüler möglich sein.

2. Mathematik am Skilift - ein Beispiel zu einem ausgewogenen Mathematikunterricht "im Kleinen"

In neueren fachdidaktischen Veröffentlichungen - vor allem im angelsächsischen Sprachraum - verstärkt sich in letzter Zeit das Bemühen, die Erarbeitung mathematischer Inhalte und die Einübung der für den Mathematiker typischen Arbeitsweisen auf dem Wege über reale Problemsituationen zu verfolgen. Hinter diesem Ansatz steht das Ziel, das Wechselspiel zwischen "reiner" und "angewandter" Matheamtik stärker zu verdeutlichen und auf diese Weise ein ausgewogeneres Bild von Mathematik als Gesamtphänomen zu vermitteln, als dies in der üblichen Schulpraxis der Fall ist.

In diesem Abschnitt wird im Anschluß an eine Idee von H. WINTER (1973) in diesem Stil ein Kurs über ganzzahlige Lineare Optimierung und Zahltheorie entwickelt, und es werden daran die drei Standpunkte des Mathematisierens aufgezeigt, die in E. WITTMANN (1974) beschrieben sind.

Der Kurs setzt an der Mathematisierung einer realen Problemsituation an. Das hierbei entwickelte mathematische Instrumentarium wird zunächst begrifflich geordnet und dann auf verschiedenartige Probleme in und außerhalb der Mathematik angewandt. In die Planung des Kurses gingen didaktische Prinzipien ein (vgl. E. WITTMANN 1974[1]), und es wurde eine Reichhaltigkeit hinsichtlich der von H. WINTER entwickelten allgemeinen Lernziele angestrebt. An Vorkenntnissen benötigen die Schüler die Grundrechenarten, Tabellenlesen und die Begriffe des ggT und kgV.

2.1 Ausgangspunkt: Eine reale Situation

Die Schüler erhalten einen Prospekt über die Lifte eines Wintersportorts, in dem u.a. eine Skizze des Skigeländes und folgende Tabelle steht.

Skilift	Entwertung für Punkteblock: Saison	Vorsaison	Preis für Einzelfahrt	geeignet für
Albeina	13	7	8.00 Fr.	Fortgeschrittene
Schaffürgli	6	4	3.60 Fr.	Fortgeschrittene
Glatteggen	5	3	3.00 Fr.	Anfänger
Ziegenhüttli	3	2	1.80 Fr.	Anfänger

Tab. 1

Ein 40-Punkte-Block kostet 20 Fr.
Ein 90-Punkte-Block kostet 40 Fr.
In der Skizze sind noch die Höhenmeter der Tal- und Bergstationen der Lifte angegeben.
Nachdem Unklarheiten zu den Bezeichnungen in der Tabelle geklärt sind und der Mechanismus der Entwertung des Blocks erläutert ist, kennt sich der Schüler in der Situation aus. Seine Aufgabe ist es, in dieser offenen Situation Fragestellungen und Probleme zu entdecken.

2.2 Probleme

2.2.1 Einfache Probleme

Es ist naheliegend festzustellen, ob sich die Anschaffung eines Punkteblocks lohnt. Dazu müssen die Spalten für die Entwertung des Punkteblocks und der Preis für Einzelfahrten in Beziehung gebracht sowie der Preis für den Punkteblock berücksichtigt werden.
Hierbei wird besonders die intellektuelle Technik des Analogisierens angesprochen, denn der Schüler kann eine Zuordnungsvorschrift erkennen: Bei den drei letztgenannten Liften ent-

sprechen einem Punkt - auf die Einzelfahrt bezogen - 60 Rappen. Diese Zuordnung wird jedoch beim Albeina Lift unterbrochen. Dort entsprechen einem Punkt mehr als 60 Rappen. Auf dem 40-Punkteblock kostet ein Punkt 50 Rappen. Der Block lohnt sich also (besonders in der Vorsaison).
Die Wirtschaftlichkeit des Blocks wird jedoch beeinträchtigt, wenn nicht alle Punkte "verliftet" werden. Ein Schüler will möglichst viele Punkte im Ziegenhüttli verliften! Aus diesem Problem ergeben sich die Fragen: Wie oft kann er fahren? Was müßte er bezahlen, wenn er genauso oft auf Einzelkarten fährt? Was ergibt sich, wenn er am Schaffürgli fährt? (Vier Punkte bleiben, von denen er jedoch drei noch am Ziegenhüttli verfahren könnte.)

2.2.2 Optimierungsprobleme

Die Probleme, die sich einem fortgeschrittenen Läufer stellen, der nur am Albeina und am Schaffürgli Lift fährt, sollen ausführlicher dargestellt werden.

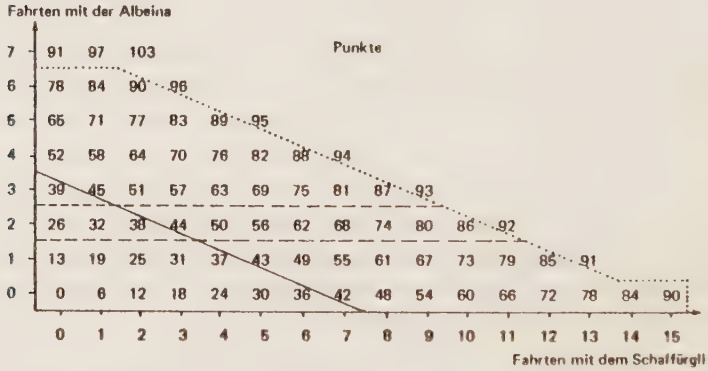
Frage 1: Wie viele Punkte kann er höchstens von seinem 40-(90-)Punkteblock verbrauchen?

Frage 2: Wie viele Punkte kann er höchstens verbrauchen, wenn er höchstens (mindestens, genau) zweimal mit dem Albeina fährt?

Beim Aufstellen solcher Fragestellungen lernt der Schüler Situationen zu variieren, und zeigt so Ansätze zu kreativem Verhalten.

Bei ersten Lösungsversuchen erkennt der Schüler, daß an einem Lift allein nicht alle Punkte entwertet werden können. Aber auch wenn er versucht, verschiedene Fahrten auf beiden Liften zu kombinieren, wird er merken, daß der Läufer günstigstenfalls 39 Punkte verfahren kann, nämlich dann, wenn er dreimal mit dem Albeina fährt. Beim Schüler liegt nun aber die "Beweislast", diese Lösung als optimal zu verteidigen, denn es hätte ja sein können, daß der Skifahrer eine Fahrtenkombination über-

sehen hat. Einfach erfolgt dieser Nachweis, wenn die möglichen Fahrten systematisch in einer Tabelle zusammengestellt werden (Tabelle 2). Dadurch, daß der Schüler dem Paar (u,v)(u Fahrten mit dem Schaffürgli, v Fahrten mit dem Albeina) die Punktezahl u·6 + v·13 zuordnet ist ihm eine Mathematisierung der Situation gelungen, die er durch die Tabellierung weitertreibt.



Tab. 2

In der Tabelle 2 stehen unterhalb der durchgezogenen Linie alle Möglichkeiten mit dem 40-Punkteblock die Fahrten aufzuteilen und unterhalb der gepunkteten Linie die Möglichkeiten mit dem 90-Punkteblock.
In der Optimierung heißt dieser Bereich der Möglichkeiten das "Gebiet der zulässigen Lösungen".
Bei der Bearbeitung der Frage 2 müssen noch die gestrichelten Linien berücksichtigt werden: Die optimale Lösung ist 38 Punkte, die man zusammen bei je zwei Fahrten am Ziegenhüttli und Albeina fährt.
Bei der tabellarischen Art der Bearbeitung der obigen Fragen können die Schüler Vorerfahrungen über einen Satz der linearen Optimierung sammeln, der besagt:
Eine optimale Lösung befindet sich in einer Ecke des Gebietes der zulässigen Lösungen.

Die Schüler sind nun auch befähigt, ein Lösungsverfahren für lineare Optimierungsprobleme (mit zwei Variablen) zu formulieren·

1. Schritt: Lege eine Tabelle an!
2. Schritt: Bestimme das Gebiet der zulässigen Lösungen!
3. Schritt: Suche aus den Eckzahlen die größte heraus!

Dieses einfache Verfahren trägt schon das wesentliche Merkmal des Simplexalgorithmus, der rein algebraisch arbeitet und hauptsächlich zur Bearbeitung der Probleme mit mehr als zwei Variablen eingesetzt wird: Nur die Ecken des zulässigen Gebietes werden auf den größten (bzw. kleinsten) Wert hin untersucht. Die eben aufgestellten Fragen können in der 8. Klasse wieder aufgenommen werden. Jedoch wird dort in stärkerem Maße formalisiert. Beispielsweise ergibt sich die Lösung des Problems: "Ein Schüler fährt in der Vorsaison an Albeina und Schaffürgli. Er will mindestens zweimal mit dem Schaffürgli fahren. Wie viele Punkte kann er höchstens von seinem 40-Punkteblock verfahren?" als die (graphische) Lösung eines linearen Ungleichungssystems:

Suche das Maximum von $z = 7u + 4v$

unter Beachtung der Ungleichungen $u \geq 2 \quad v \geq 0$

$7u + 4v \leq 40.$

$u, v \in \mathbb{N}_0$ sind die Anzahl der Fahrten mit dem Schaffürgli bzw. Albeina.

2 2.3 Zahlenprobleme

Frage 3: In der Tabelle 2 kann man stellenweise fortlaufend zählen. Wie kommt das?

Geht man in der Tabelle 2 um zwei Positionen nach links und eine nach oben, so kommt man zu einer um eins größeren Zahl!

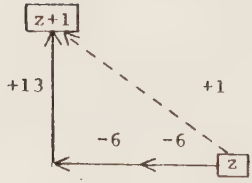


Abb. 1: Zählalgorithmus für Tabelle 2

Frage 4: Wieso kann man in der Tabelle 2 ab 60 alle natürlichen Zahlen eintragen?

Beginnt man mit 60, so hat man in der Tabelle 2 genügend Platz, um fünfmal den Einerschritt auszuführen. Dann ist man bei 65 und springt zu 66, dem rechten Nachbarn von 60 und beginnt dann wieder mit den Einerschritten usw.

Bei der Beantwortung dieser Fragen wird in dem Schüler besonders die Fähigkeit zu argumentieren angesprochen. Den Zählalgorithmus können wir formalisieren, wenn wir ihn in einem Ablaufplan darstellen.

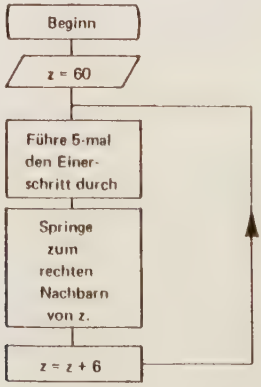
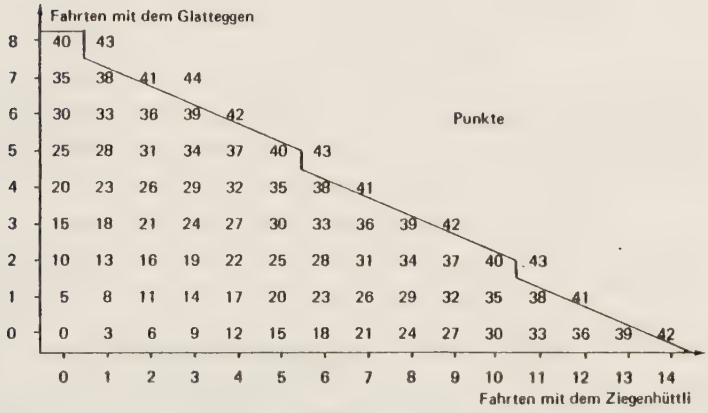


Abb. 2: Ablaufplan für den Zählalgorithmus

Die Feststellung, daß alle natürlichen Zahlen, die größer als 59 sind, in der Tabelle vertreten sind, hat einen praktischen Nutzen, Der Schüler kann jeden Punkteblock mit mehr als 59 Punkten vollständig verliften.
Um weitere Zahlenprobleme aufzudecken und zu beantworten, benutzen wir die Tabelle 3, die wir zur Klärung folgender Frage anfertigen.

Frage 5: Kann ein Anfänger seine 40 Punkte am Glatteggen und Ziegenhüttli verliften?



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
8	40	43													
7	35	38	41	44											
6	30	33	36	39	42										
5	25	28	31	34	37	40	43								
4	20	23	26	29	32	35	38	41							
3	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42					
2	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43			
1	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41		
0	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42

Tab. 3

Die Tabelle zeigt drei Möglichkeiten, um alle 40 Punkte zu verliften. Ein für die lineare Optimierungsrechnung wichtiges Ergebnis fällt hier ab:
Es kann mehrere optimale Lösungen geben.

Auch in Tabelle 3 gibt es eine kleinste untere Schranke (nämlich 8), ab der alle natürlichen Zahlen auftreten. Wir können sie mit einem Zählalgorithmus "abgrasen". Beginne mit z = 8.

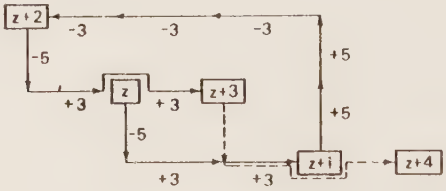


Abb. 3: Zählalgorithmus für Tabelle 3

Eine andere Möglichkeit der Erzeugung der natürlichen Zahlen aus Tabelle 3 besteht darin, sie als Vereinigung der geraden und ungeraden Zahlen zu bilden.

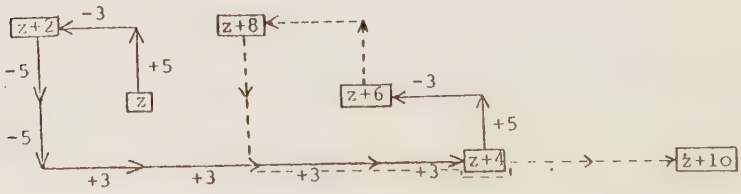


Abb. 4: Zählen in Zweierschritten

Beginnen wir mit z = 8, so erhalten wir die geraden Zahlen (≥ 8). Beginnen wir mit z = 11, dem rechten Nachbarn von 8, so erhalten wir die ungeraden Zahlen (≥ 11). Die 9 erfassen wir so nicht. Dies gelingt jedoch sofort, wenn wir den obigen Algorithmus aus Abb. 4 modifizieren und mit 9 beginnen. Sieht man von der situationsgebundenen Bedeutung der Tabelle 3 ab, so handelt es sich um ein Operatorennetz mit den Operatoren 3 und 5 sowie der Startzahl 0 (siehe WINTER, 1973, S. 186) oder um eine

systematische Anordnung der Menge $A = \{ z / z = n \cdot 3 + m \cdot 5;\ n, m \in N_0 \}$. Die Schüler können beim Analysieren der Tabelle auch Vorerfahrungen über Restklassen sammeln. Sie können beispielsweise die natürlichen Zahlen (≥8) als die Vereinigung der Restklassen bezüglich 8 darstellen. Benutzen wir den "Achterschritt" (Abb. 5) und durchlaufen Tabelle 3 in Richtung der ersten Hauptdiagonalen, dann reihen sich die natürlichen Zahlen an acht verschiedenen Ketten auf, die mit 8, 9, 10, ..., 15 beginnen (Abb. 6).

Fragen hierzu: In welcher Kette steht die Zahl 107?

In welcher Kette finde ich den Summenwert, wenn ich eine Einerrestzahl und eine Viererrestzahl addiere (zwei Dreierrestzahlen addiere)?

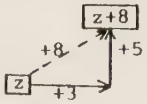
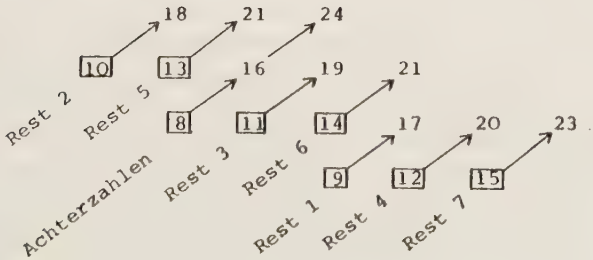


Abb. 5

Abb. 6



Zwanglos schließt sich das Problem an:

Frage 6: Gibt es Operatorennetze, in denen man nicht fortlaufend zählen kann?

Untersuchen wir einige Fälle und stellen sie in einer Tabelle zusammen!

Operatoren a , b	Das Netz enthält
6 , 13	fortlaufend
5 , 3	natürliche
4 , 9	Zahlen
4 , 8	Viererzahlen
6 , 8	Gerade Zahlen
12 , 3	Dreierzahlen

Tab. 4

Nach einer Analyse der Tabelle 4 kann der Schüler vermuten:

> In Operatorennetzen mit teilerfremden Operatoren kann fortlaufend gezählt werden; in denen mit gemeinsamen Teilern 1 kann man nicht fortlaufend zählen.

Füllt man noch in Tabelle 4 eine ggT-Spalte aus, so wird die Abhängigkeit der auftretenden Zahlen vom ggT (a,b) offensichtlich. (ggT (6,13) = 1, ggT(5,3) = 1, ggT(4,9) = 1, ggT(4,8)= 4, ggT(6,8) = 2, ggT(3,12) = 3).
Berücksichtigen wir noch, daß die Menge der Vielfachen einer natürlichen Zahl abgeschlossen ist bezüglich Addition und Multiplikation, so kann der Schüler die Regel formulieren:
Ist c der ggT(a,b), so enthält das zugehörige Operatorennetz nur Vielfache von c.
Wenden wir das eben gefundene Resultat an! (Bei dieser Tätigkeit spezialisiert der Schüler, indem er einen allgemeinen Satz bzw. Regel zur Beantwortung spezieller Fragen als relevant erkannt.)
"Kann man am Schaffürgli und Ziegenhüttli einen 40-Punktblock abfahren?"
"Nein, denn a=6 und b=3 haben 3 als ggT, aber 40 ist keine Dreierzahl."
Weitere Anwendungsmöglichkeiten siehe 2.6.
Weiterführende Fragen:

Frage 7: Welche Zahl kommt in der Tabelle zuerst doppelt vor? (vgl. H. WINTER, 1973).

In Tabelle 2 ist es 78 = 6·13, in Tabelle 3 ist es 15 = 3·5. Hier kann der Schüler eine Hypothese aufstellen:
Werden bei einem Lift a Punkte entwertet und beim anderen b Punkte, so ist a·b die kleinste Zahl, die in derPunkttabelle doppelt vorkommt.
Oder in einer Sprache formuliert, die nicht mehr auf eine bestimmte Situation bezogen ist:
In einem Operatorennetz mit den Operatoren a und b und der Startzahl 0 ist a·b die kleinste Zahl, die doppelt auftritt.
Untersuchen wir noch einige Zahlenpaare (in arbeitsteiligem Gruppenunterricht):

Operatoren	kleinste, zweimal vorkommende Zahl
6 , 13	78
8 5	40
4 , 9	36
6 , 9	18
2 , 4	4
8 , 12	24

Tab. 5

Die Schüler finden die Hypothese für die drei ersten Operatorenpaare bestätigt, nicht jedoch für die letzten drei. Die Vermutung liegt nahe, daß die Hypothese nur für teilerfremde Operatorenpaare zutrifft. Allgemein gilt:
Die kleinste zweimal vorkommende Zahl ist kgV(a,b).
Interessant wäre noch zu klären

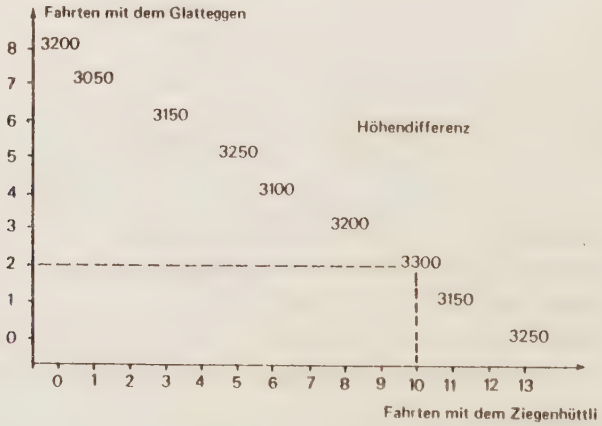
Frage 8: Ab welcher Zahl kann man in den Netzen mit teilerfremden Operatoren fortlaufend zählen?

Für a=6 und b=13 ab 60,
für a=3 und b= 5 ab 8,
für a=4 und b= 9 ab 24.
Es ergibt sich allgemein: g = a·b - a - b + 1.

2.2.4 Ein weiteres Optimierungsproblem

In den vorangehenden Aufgaben war das Kriterium, nach denen die Fahrten eingeteilt wurden, möglichst viele Punkte eines Blocks zu verliften. Im folgenden sollen die Schüler die Fahrten so einteilen, daß der Skiläufer möglichst große Höhendifferenzen von den Lifts geschleppt wird.
Als erstes muß der Schüler aus dem Prospekt Daten gewinnen (.d.h. mathematisieren). Er muß die Höhendifferenz bestimmen, die man bei einer Fahrt mit dem Lift überwindet. Es sind bei der Albeinabahn 1 000 m, beim Schaffürgli Lift 510 m, beim Glatteggen 400 m und am Ziegenhüttli 250 m.

Fragen wir uns, wie ein Skifahrer seine Fahrten am Ziegenhüttli und Glatteggen aufteilen muß, um möglichst viele Höhenmeter zu überwinden. Die möglichen Liftfahrten wurden in Tabelle 3 bestimmt. Tragen wir die zugehörigen Höhendifferenzen ein, so erhalten wir Tabelle 6.



Tab. 6

Gab es bei der Frage nach dem Verliften aller Punkte noch drei optimale Lösungen, so kommt bei der Frage nach der maximalen Höhendifferenz von diesen Lösungen nur noch eine als optimal in Betracht: Zwei Fahrten am Glatteggen und zehn Fahrten am Ziegenhüttli.
Untersucht der Schüler dieselbe Frage bezüglich der Albeina-Bahn und des Schaffürgli, so stellt sich überraschend diejenige Lösung als optimal heraus, bei der er nur 36 Punkte verliftet (nämlich sechsmal mit dem Schaffürgli und keinmal mit der Albeina-Bahn). Er überwindet so 3 060 m. (Von den restlichen vier Punkten kann er immer noch drei am Ziegenhüttli verbrauchen.) Würde er 37 Punkte verbrauchen, käme er auf 3 040 m, bei 38 Punkten auf 3 020 m und bei 39 nur auf 3000m. Die links von diesen Punkten liegenden Möglichkeiten kommen für eine optimale Lösung nicht in Betracht, da sie zwar entsprechend gleichviele Fahrten mit der Albeina enthalten, aber weniger mit dem Schaffürgli.

Auch bei diesen Aufgaben bestätigt sich, daß die optimalen Lösungen in einer Ecke des Gebietes der zulässigen Lösungen liegt.

2.2.5 Verwandte Situationen

a) Ein Schreiner soll ein Zimmer mit einer Holzdecke versehen! Diese offene Formulierung soll die Kinder anregen, nach weiteren Daten und Fragen zu forschen. Z.B. Zimmergröße 3,90mx5,70m; Brettersorten: 1. Sorte 1,20mx0,1m; 2. Sorte: 1,70mx0,1m; 3. Sorte: 2,10mx0,1m.
   Welche Bretter nimmt er mit, damit er möglichst wenig Abfall bekommt (möglichst wenig sägen muß)?
   In welchen Räumen muß er sicher nichts sägen?
b) Ein Heft kostet 23 Pfennig. Kannst Du es mit 2-Pfennig- und 5-Pfennigstücken bezahlen,ohne daß man Dir herausgibt? Welche Beträge kannst Du nicht direkt bezahlen?
c) Bündelungsaufgaben.
d) Ein Spediteur soll ein Lager mit 108(107, 45) Kisten ausräumen. Er hat zwei Lastwagentypen. Der eine kann 11 Kisten laden, der andere 8 Kisten.

Kann er den Abtransport so einrichten, daß die Lastwagen voll beladen sind? Wie wird er den Abtransport organisieren, damit er möglichst wenig Auslagen hat?
Eine Fahrt mit dem großen Lkw kostet ihn 47 DM, eine mit dem kleinen Lkw 40 DM.

2.3 Die Aktivitäten der Schüler unter dem Aspekt der Mathematisierung

Ein Vergleich mit E. WITTMANN (1974[1], S. 107-109) zeigt im Rückblick, daß im Verlauf des Kurses von den Schülern in der Tat typische Vorgehensweisen des Mathematikers praktiziert werden. Es ist sogar möglich, die Charakterisierung der drei Standpunkte des Mathematisierens an Hand des gewonnenen Beispielmaterials nahezu wörtlich zu illustrieren:

(1) Schaffung und Weiterentwicklung mathematischer Instrumente:
Diese Aktivität steht in dem Abschnitt 2.2 und am Anfang von 2.3 im Vordergrund. Sie besteht hauptsächlich in der Auseinandersetzung mit neu aufgetauchten Problemen bei Liftkarten. Zur Lösung dieser Probleme muß der Schüler einen mathematischen Apparat einsetzen, der aus teilweise bekannten oder neu zu entwickelnden Begriffen und Verfahren besteht (hier: zulässige Lösungen, Ecke,Tabellen usw.).
Das neue Instrumentarium trägt noch stark konkrete Züge und ist ganz in der Sprache des Problemkontextes formuliert. So trägt anfangs noch jede Eintragung in den Tabellen 2 und 3 die Bezeichnung "Punkte", und die Schüler formulieren Erkenntnisse kontextbezogen. (Beispiel: Am Ziegenhüttli und Albeina kann ein Läufer von seiner 40-Punktekarte höchstens 39 Punkte verfahren.)

(2) Begrifflich-strukturelle Analyse ("Abstraktion durch Rückschau"):
Diese Aktivität soll dann einsetzen, wenn der Schüler einige reale Probleme gelöst, sich innerhalb einer Problemsituation "frei bewegen" kann und einen Schatz an Erfahrungen angelegt

hat. Aus diesem Schatz erwächst dann das Bedürfnis, die Erfahrungen zu ordnen und nach allgemeingültigen Regeln zu suchen.

Die Betrachtung der ursprünglichen Probleme (nämlich möglichst viele Punkte zu verliften) tritt in den Hintergrund. Die Aufmerksamkeit richtet sich auf das gemäß (1) entwickelte Instrumentarium (den Tabellen). Die Tabellen werden losgelöst vom konkreten Kontext der Liftkarten betrachtet. Das Instrumentarium wird einer begrifflichen Präzisierung unterworfen. Der Schüler kann jetzt von dem Operator 6 sprechen (anstelle von einer Liftfahrt, bei der 6 Punkte entwertet werden) oder von 39 als der größten Zahl von 0 bis 40, die sich in der Form $n \cdot 6 + m \cdot 13$ darstellen läßt (anstelle der unter (1) angegebenen Formulierung).

Die Operatorennetze werden einer Strukturanalyse unterworfen, deren Ergebnisse kleine Hypothesen sind. Durch weitergehende Überlegungen wird versucht, diese Hypothese als allgemeingültig zu bestätigen und somit als Sätze zu formulieren.

Allerdings ist diese begriffliche Präzisierung nicht notwendig - und wird von einem Teil der jungen Schüler auch gar nicht erreicht -, um die Zahleigenschaften der Tabellen zu erfassen.

(3) Anwendung

Die in (1) geschaffenen und in (2) präzisierten Instrumentaria können im vertrauten Bereich - dem Liftkartenproblem - oder auf neue Bereiche (siehe 2.5) angewendet werden.

Unter dem Gesichtspunkt der Anwendung tritt an (2) eine besondere Eigenschaft hervor: die Ökonomie der Abstraktion. Die mathematische Sprache kann bei der Bearbeitung verschiedenartiger realer Problemsituationen angewendet werden, zu deren inhaltlicher Beschreibung ein vielfältiges Vokabular notwendig ist. Die in 2.4 formulierten Hypothesen und Sätze gestatten es, daß ein einmal entwickeltes Instrumentarium in verwandten Situationen einsetzbar ist und nicht neu entwickelt werden muß.

Die hier dargestellten Ausführungen können auch den Hintergrund abgeben für ein Gespräch mit den Schülern über die Frage, wie Mathematik entsteht. Ein Verständnis für den Prozess der Mathematisierung läßt sich freilich nur erzielen, wenn diese Frage im Rahmen eines geeignet konzipierten Mathematikunterrichts immer wieder neu aufgegriffen wird.

3. Feldmausplagen- ein Beispiel zum Projektunterricht

In dem Aufsatz von T.J.FLETCHER "A heuristic Approach to Matrices" (1968) wird u.a. eine populationsdynamische Situation zur problemorientierten Einführung der Matrizenmultiplikation genutzt und auf die motivierende Wirkung zur Behandlung von Eigenwerten hingewiesen. Der Aufsatz regt zur intensiven Nutzung dieser biologischen Problemsituationen auch für den Mathematikunterricht an.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß Populationsdynamik auf verschiedenen Altersstufen sinnvoll behandelt werden kann, und daß sich die ergebenden mathematischen Fragestellungen in die geltenden Lehrpläne einordnen.

In der 6. Klasse kann durch die Bearbeitung des mathematischen Modells einer Situation die Bruchmultiplikation geübt werden oder deren Einführung motiviert werden. Der Begriff der Iteration kann operational gebildet werden.

Auf der Sekundarstufe II eignet sich die Populationsdynamik zur Erzeugung von Problemen die mit Exponentialfunktionen und deren Integration gelöst werden. Die dort behandelte natürliche Situation der zyklischen Schwankungen in Feldmauspopulation führt auch auf lineare Transformationen, deren iterative Behandlung mit einem Computer sinnvoll ist.

Schließlich kann ein Beitrag zur Hochschuldidaktik geleistet werden. Denn die Darstellung verschiedener Formen der Populationsentwicklung legt die Frage nach der Art der zugehörigen Transformationsmatrizen nahe. So ergibt sich die Möglichkeit einige Sätze über Transformationsmatrizen nach dem Prinzip der Problemorientierung anzuordnen.

Die diesem Abschnitt zugrunde gelegten Problemsituationen eignen sich besonders zu einer fächerübergreifenden Bearbeitung bei der die Zusammenarbeit von Biologielehrer und Mathematiklehrer im Vordergrund steht. Der Biologe führt in die Situation ein.

Der Mathematiker faßt diese in einem mathematischen Modell zusammen, um sie einer Bearbeitung mit bekannten mathematischen Methoden zugänglich zu machen.

3.1 Populationsdynamik in Klasse 6

Auf dieser Altersstufe lohnt es sich erstmals im Zusammenhang mit der Bruchrechnung Populationsdynamik zu betreiben.

Wir gehen von einer Situationsschilderung des Lehrers aus, die eventuell auf Vorwissen aus dem Biologieunterricht aufbauen kann.

"Aus dem Biologieunterricht wissen wir, daß die Entwicklung des Käfers xy so vor sich geht: Aus Eiern schlüpfen nach einem Jahr Larven und nach einem weiteren Jahr werden diese zu Käfern, die dann wieder Eier legen und anschließend sterben.

Aus der Hälfte der Eier werden Larven, die andere Hälfte wird von Tieren gefressen oder verendet. Von den Larven wird ein Drittel zu Käfern, die anderen sterben. Jeder Käfer legt sechs Eier.

Die Biologie-A.G. unserer Schule will die Käfer über 4 Jahre hinweg beobachten und kauft 30 Käfer, 30 Larven und 30 Eier in der Zoohandlung. Außerdem muß für die Käfer ein Terrarium gekauft werden. Wenn es im Laufe der Jahre nicht über 50 Käfer werden, genügt ein kleines. Muß nun ein kleines oder ein großes Terrarium gekauft werden?"

Diese lange verbale Darstellung der Situation können wir in einem Flußgraphen (Abb. 1) zusammenfassen.

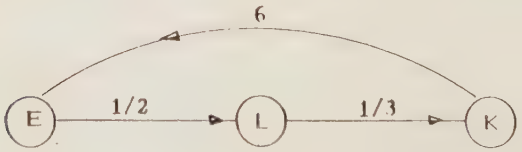


Abb. 1

E ist die Anzahl der Eier, L die Anzahl der Larven und K die Anzahl der Käfer. Die an den Kanten angegebenen Zahlen sind Faktoren. So muß der Bestand an Eiern mit 1/2 multipliziert werden, um den Bestand an Larven im nächsten Jahr zu erhalten.

Die Fortentwicklung der Käferpopulation kann iterativ mittels der linearen Transformationsgleichungen erfaßt werden:

$$(G)\quad \begin{aligned} E_{t+1} &= 6K_t \\ L_{t+1} &= 1/2E_t \\ K_{t+1} &= 1/3L_t \end{aligned} \qquad ,t\in N_o$$

t gibt die Anzahl der Jahre an, die nach dem Einkauf der Ausganspopulation $E_o=30$, $L_o=30$, $K_o=30$ vergangen sind. In Matrixvektorschreibweise geht (G) über in

$$(M)\quad v_{t+1} = Tv_t$$

mit $v_t = (E_t, L_t, K_t)'$ und $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

Schülern im 6. Schuljahr kann weder (G) noch (M) zugemutet werden. Wie kann jedoch den Schülern das Wesentliche von (G) und (M) vermittelt werden? Nämlich

- das iterative Vorgehen und
- die Operatorfunktion von T.

Wir ersetzen T durch die kleine Maschine aus Pappe, die gleich die Anzahl der Jahre nach dem Einkauf mitzählt (Abb. 2)

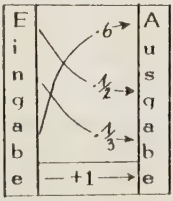
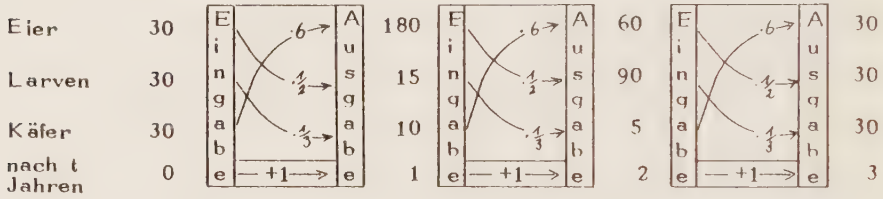


Abb. 2

Wir wenden sie als Operator auf die Ausgangspopulation an, dann auf die Population nach einem Jahr, nach zwei Jahren, nach drei Jahren usw. So ergibt sich Tabelle 1.



Tab. 6

Wir erkennen, daß sich die Ausgangspopulation nach 3 Jahren wiederholt, und nie mehr als 30 Käfer leben. Es genügt dann das kleine Terarium.

Das Vorgehen in Tabelle 1 können wir auch ersetzen durch die Anordnung der Abbildung 3.

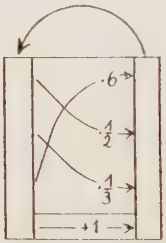


Abb.3

Die entstehenden Vektoren v_t schreiben wir auf schmale Papierstreifen um sie anschließend auszuwerten. Beispielsweise können wir den Verlauf der Population in einem Graphen aufzeichnen (Abb. 4).

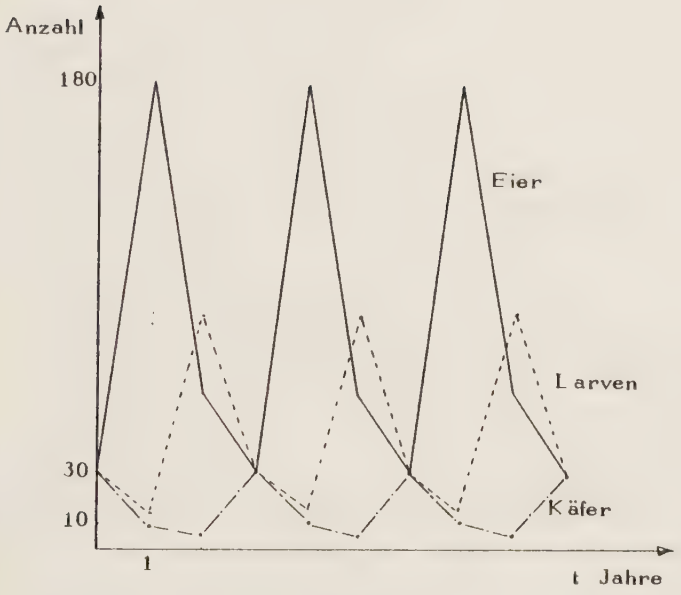


Abb. 4

Einige Fragen zur Analyse von Abbildung 4 wären:

- Welcher zeitliche Zusammenhang besteht zwischen den Spitzen in der "Eierkurve", "Larvenkurve" und "Käferkurve"?
- Vergleiche die Gestalt der Kurven!

Die Aufgabenstellung kann in mancherlei Weise variiert werden.

Zuerst einige Fragen, die die Abhängigkeit des Populationsverlaufs von der Anfangspopulation klären sollen.

- Was passiert, wenn nur Eier eingekauft werden?
- Hätten wir in der Zoohandlung so einkaufen können, daß in jedem Jahr gleichviele Käfer da sind?
- Kaufe so ein, daß wir nach 2, 5, 8,... Jahren die größten Käferzahlen haben.

Durch Abändern der Faktoren (Überlebensraten, Vermehrungsraten) können wir verschiedene Wachstumsformen bekommen.

- Konstruiere eine Maschine, die eine steigende Käferzahl erzeugt!
- Konstruiere eine Maschine, so daß die Käfer im Lauf der Jahre aussterben! Zeichne!
- Welche Beziehung besteht jeweils zwischen den Faktoren?

(Hier können die Kinder den asymptotischen Verlauf eines Graphen erleben. Insbesondere wenn man auf Ganzzahligkeit verzichtet.)

Weiter:
- Was würden zusätzliche Pfeile in der Maschine bedeuten? Sind sie biologisch gesehen sinnvoll?

Durch Komplizierung der Faktoren können wir Bruchrechnen üben.

3.2 Populationsdynamik in der Sekundarstufe II - Feldmausplagen

In diesem Abschnitt wird für die Sekundarstufe II eine reale Situation bearbeitet. Sie unterscheidet sich in einigen Punkten von der in Klasse 6.

- Die biologischen Daten sind unvollständig, so daß erstens Freiheitsgrade entstehen und lineare Transformationen unmittelbar nicht anwendbar erscheinen und zweitens die Modellbildung erschwert wird.
- Durch die Vielzahl der Daten tritt eine Erhöhung des Rechenaufwands ein, die den Einsatz eines Computers aufzwingt.
- Die Betrachtung von Männchen und Weibchen kompliziert das mathematische Modell.

3.2.1 Biologische Daten

Die Feldmaus lebt hauptsächlich von den Früchten auf den Äckern und Wiesen. Sie baut Erdlöcher und legt im Herbst Vorräte an. Ihre Vermehrungsfähigkeit ist stark. Das damit verbundene Ansteigen einer Mäusepopulation und ihr Zusammenbruch, nachdem eine hohe Siedlungsdichte erreicht wurde, ist ein altbekanntes

Phänomen. So lesen wir bei CESENER (1669): "In etlichen Landen und Feldern sollen sie (die Mäuse) sich unzählbar vermehrt und zu solcher Menge kommen, daß sie auch das Korn gantz abfressen und hinwegtragen. Solche Mäuse sollen auch ebenso gehling wieder vergehen und sterben, daß niemand weiß wie und warumb." (Zitiert nach STEIN, 1958)

Die neuen biologischen Forschungen von STEIN sagen Genaues über das "Vergehen" und Anwachsen der Mäusepopulation aus:

(B1) Die Schwankungen erfolgen in Zyklen von 3-4 Jahren.
(B2) Kurz vor dem Zusammenbruch einer Population bleibt für eine Maus eine Siedlungsfläche von durchschnittlich ca. 3,3 m^2.
(B3) Feldmäuse werden in der Natur höchstens ein Jahr alt.
(B4) Ein Weibchen kann bis zu viermal Junge bekommen. Durchschnittlich sind es 5,1 Junge pro Wurf mit dem Verhältnis 2,8:2,3 von jungen Weibchen zu jungen Männchen.
(B5) Alte Männchen versuchen Männchen mittleren Alters zu töten, während sie junge schonen.
(B6) Nach dem Zusammenbruch beträgt die Siedlungsfläche über 100 m^2 je Maus.

Das auslösende Moment des Zusammenbruchs der Population sind nicht etwa Nahrungsmangel oder Seuchen, sondern ein Schock, der durch das Gedränge erzeugt wird und den Blutzuckerspiegel sinken läßt. Überlebensraten (oder Sterberaten) für einzelne Altersgruppen werden von STEIN nicht angegeben.

In unserer Betrachtung beschränken wir uns auf eine Siedlungsfläche von 10 000 m^2. Auf ihr können maximal etwa 3030 Mäuse leben.

3.2.2 Der Flußgraph - Modell I

Die Verwendbarkeit von Flußgraphen zur anschaulichen Darstellung populationsdynamischer Problemsituationen hat u a. A. ENGEL (1972) an einigen künstlichen Situationen demonstriert, hierbei wird der kontinuierliche Zeitablauf in einen diskreten überführt.

Bei den Mäusen gelingt dies, wenn wir wesentliche Zeitpunkte (Zustände) aus dem Leben einer Maus herausgreifen, wir nehmen hier die Zeitpunkte ihrer Geburt und dem Gebären junger Mäuse. Zur Vereinfachung des zu erarbeitenden Modells nehmen wir an, daß alle Weibchen gleichzeitig werfen. Dann gibt es wegen (B3) und (B4) pro Jahr vier Zeitpunkte der Vermehrung. Um die biologischen Angaben formalisieren zu können, führen wir einige Bezeichnungen ein. Mit W_0 wird die Anzahl der neugeborenen weiblichen Mäuse bezeichnet. W_1, W_2, W_3, W_4 seien die Anzahlen weiblicher Mäuse die zum ersten, zweiten, dritten, viertenmal werden. Nach dem vierten Wurf stirbt eine Maus mit Sicherheit.

Entsprechend den Weibchen teilen wir die Männchen in Altersgruppen ein: M_0, M_1, ...,M_4. M_1 gibt also die Anzahl der Männchen an, die das gleiche Alter wie die Weibchen haben, die zum erstenmal werfen. a_i bzw. b_i seien die Überlebensraten für die Altersgruppen der Weibchen bzw. Männchen (i=1, 2, 3, 4).

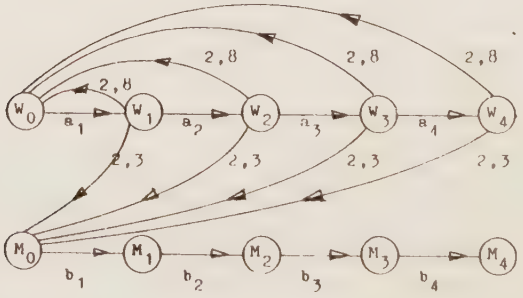


Abb. 5

Multiplizieren wir also W_2 mit a_3 so erhalten wir W_3 für den nächsten Vermehrungszeitpunkt. Berücksichtigen wir noch die Geburtenrate 2,8 (für junge Weibchen) und 2,3 (für junge Männchen), so können wir das Verhalten der Population in einem Flußgraphen (Abb. 5) darstellen.

Wir interessieren uns nun für die Entwicklung der Population P

$$P_t = \sum_{j=o}^{4} (W_{j,t} + M_{j,t}), \qquad t = o, 1, 2...$$

t gibt die Anzahl der Vermehrungen an, die nach einem ausgewählten Zusammenbruch (t=O) eingetreten sind. So gibt beispielsweise $W_{3,12}$ die Anzahl der weiblichen Mäuse in der Altersgruppe 3 nach 12 Vermehrungen an. Wir gehen davon aus, daß uns die Population P_o nach dem Zusammenbruch bekannt ist. Wie berechnet man aus P_o den Stand P_1 der Population nachdem die erste Vermehrung stattfand? Wie kann man allgemein P_{t+1} aus P_t berechnen?

3.2.3 Lineare Transformationen - Modell II

Dem Flußgraphen können wir die folgenden linearen Transformationsgleichungen entnehmen:

Für die Weibchen gilt:

$$\begin{aligned}
W_{O,t+1} &= 2{,}8W_{1,t} + 2{,}8W_{2,t} + 2{,}8W_{3,t} + 2{,}8W_{4,t} \\
W_{1,t+1} &= a_1 W_{O,t} \\
W_{2,t+1} &= a_2 W_{1,t} \\
W_{3,t+1} &= a_3 W_{2,t} \\
W_{4,t+1} &= a_4 W_{3,t}
\end{aligned} \qquad \text{(LTW)}$$

Für die Männchen gilt:

$$\begin{aligned}
M_{O,t+1} &= 2{,}3W_{1,t} + 2{,}3W_{2,t} + 2{,}3W_{3,t} + 2{,}3W_{4,t} \\
M_{1,t+1} &= b_1 M_{O,t} \\
M_{2,t+1} &= b_2 M_{1,t} \\
M_{3,t+1} &= b_3 M_{2,t} \\
M_{4,t+1} &= b_4 M_{3,t}
\end{aligned} \qquad \text{(LTM)}$$

(LTW) kann kürzer in Matrixvektorschreibweise angegeben werden

$$w_{t+1} = Aw_t.$$

$$\text{Mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 2{,}8 & 2{,}8 & 2{,}8 & 2{,}8 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 \end{pmatrix}$$

und $w_t = (W_{0,t}, W_{1,t}, \ldots, W_{4,t})'$.

Für (LTM) ist diese Darstellung nicht so kurz

$$m_{t+1} = Bm_t + Cw_t,$$

$$\text{mit } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m_t = (M_{0,t}, M_{1,t}, \ldots, M_{4,t})'$$

$$\text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2,3 & 2,3 & 2,3 & 2,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Eine genaue Betrachtung der Abhängigkeit von Transformationsmatrix und Populationswachstum erfolgt im letzten Abschnitt).

Wir wollen nun das Wachstum der Mäusepopulation simulieren, in dem wir mittels der linearen Transformation P_1 aus P_o und allgemein P_{t+1} aus P_t berechnen. Dazu fehlen uns noch zwei Angaben, die in den biologischen Daten (B1) - (B6) nicht vollständig festgelegt sind. Es sind dies P_o und die Überlebensraten. Beide können in bestimmten Grenzen frei gewählt werden, müssen aber sinnvollerweise so festgelegt werden, daß die Populationsentwicklung in unserer Simulation die Bedingungen (B1) - d.h. nach 3 bis 4 Jahren muß eine Populationszahl von 3030 erreicht sein - und (B6) erfüllt.

Gemäß (B6) gehen wir von einer Population mit sehr geringer Siedlungsdichte aus: Es sei beispielsweise $P_o = 68$ und im einzelnen

$$w_o = (W_{0,0}, W_{1,0}, W_{2,0}, W_{3,0}, W_{4,0})' = (23, 8, 3, 2, 1)'$$

und

$$m_o = (M_{0,0}, M_{1,0}, M_{2,0}, M_{3,0}, M_{4,0})' = (20, 7, 2, 2, 1)'$$

Bedienen wir uns eines Computers[1], so kann durch Eingabe verschiedener Datensätze für die Überlebensraten schnell ein Datensatz ermittelt werden, der (B1) erfüllt und 3- oder 4-jährige Zyklen (S. Tab. 2 und Programmablauf).

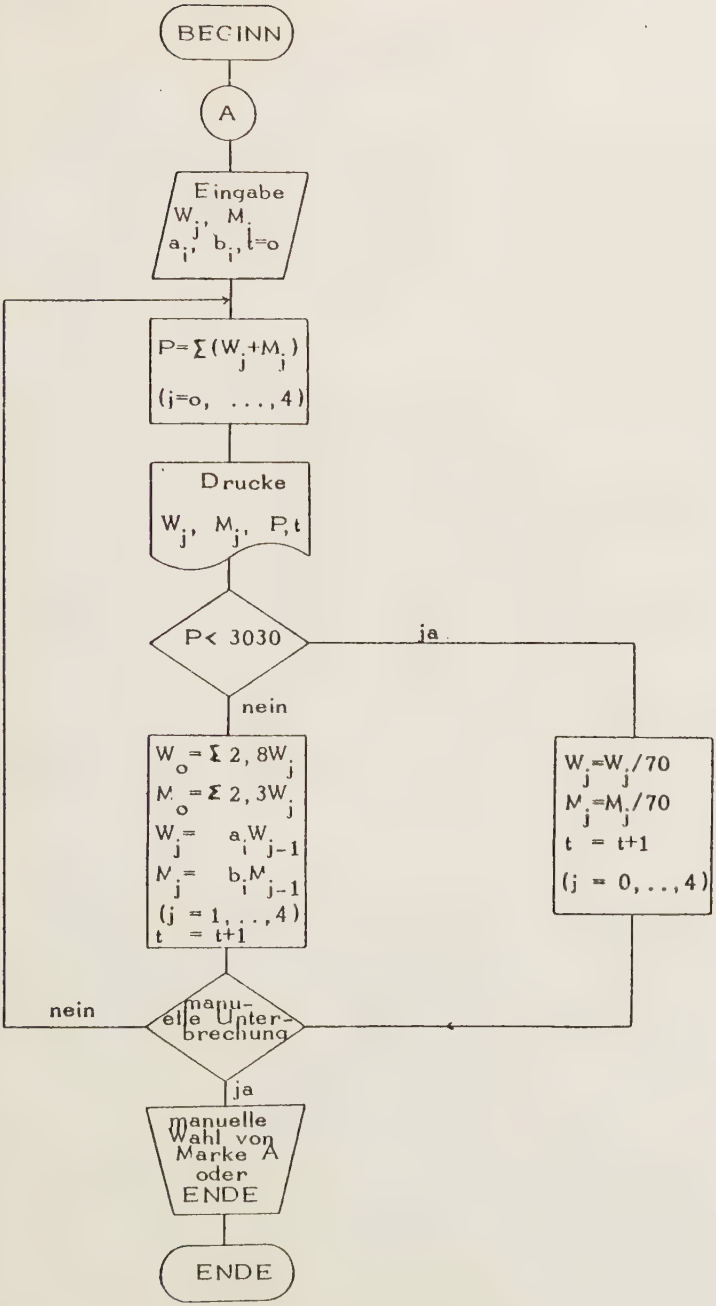
Ist eine Population über 3030 Mäuse gestiegen, so wird der Kollaps dadurch simuliert, daß die Population auf ihren siebzigsten Teil reduziert wird. Dies führt wieder auf eine Population von sehr geringer Siedlungsdichte und entspricht somit dem Verhalten der Natur. An dieser Stelle wird die Bedeutung des mathematischen Modells im Zusammenwirken mit einem Computer deutlich. Dem Computer kommt eine stark zeitraffende Funktion zu. Er ist das Objekt zur Simulation von Situationen; er wird zum Gegenstand experimentellen Einwirkens. An der Reaktion des Modells können wir ablesen, ob ein Datensatz sinnvoll ist oder nicht. Wir haben die Möglichkeit bekommen eine Hypothese im biologischen Bereich aufzustellen.

Probieren wir nun verschiedene Datensätze durch.

Datensatz Nr.	1	2	3	4
b_2	0,2	0,2	0,2	0,2
$a_1=a_2=b_1$	0,2	0,3	0,4	0,5
$a_3=a_4=b_3$	0,7	0,7	0,7	0,7
b_4	1	1	1	1
Abbildung Nr.	6	7	8	-
Form der Populationsentwicklung	aussterbend	9-jähriger Zyklus	4-jähriger Zyklus	3-jähriger Zyklus

Tab.2

1) Für die Rechnungen stand der Tischcomputer Olivetti P 602 mit einem x-y-Koordinatenschreiber (Plotter) zur Verfügung.



Programmablaufplan

Da die jungen Mäuse arteigene Feinde haben und gegen ungünstige Witterung nicht so widerstandsfähig sind, wurden die Überlebensraten junger Mäuse niedriger gewählt, als die älterer Mäuse. b_2 wurde im Vergleich zu den Koeffizienten a_1, a_2, b_1 wegen (B5) noch niedriger gewählt; b_4 dagegen groß, da die Männchen der Altersgruppe 3 keine arteigenen Feinde haben.

Die Datensätze unterscheiden sich nur in den die Populationsentwicklung am stärksten beeinflussenden Koeffizienten (Überlebensraten) a_1, a_2, b_1. Tabelle 3, die nach dem Ausdruck des Tischcomputers zusammengestellt wurde, zeigt die Entwicklung über 15 Generationen hinweg.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
P_1	106	133	109	114	92	91	79	74	66	60	54	49	44	39	35	31
P_2	68	77	86	97	110	124	140	158	179	202	229	259	293	331	376	426
P_3	68	100	121	164	208	280	365	484	634	838	1102	1453	1912	2521	3320	47
P_4	68	105	147	221	321	482	710	1057	1564	2323	3342	48	71	107	155	230

Tab. 3

Über einen längeren Zeitraum hinweg wird die Entwicklung in dem von einem Plotter gezeichneten Graphen dargestellt:

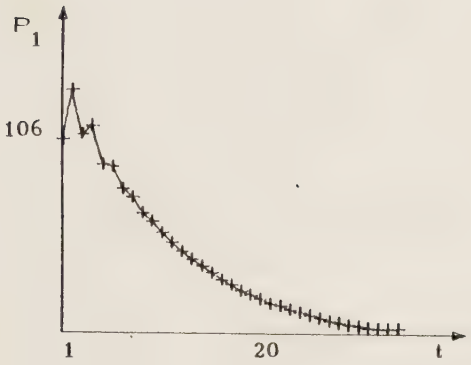


Abb. 6 aussterbende Population

Die Ausgangspopulation für P_1 ist $P_1^o = 106$ mit $W^o = (39,13,5,2,1)$ und $M^o = (32,11,2,1,0)$.

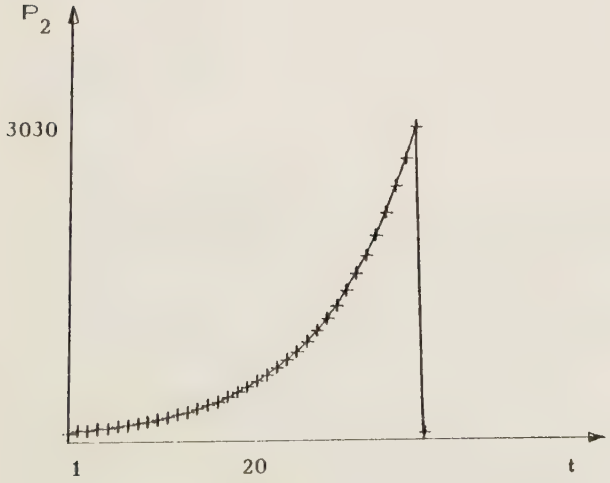


Abb. 7 9-jähriger Zyklus

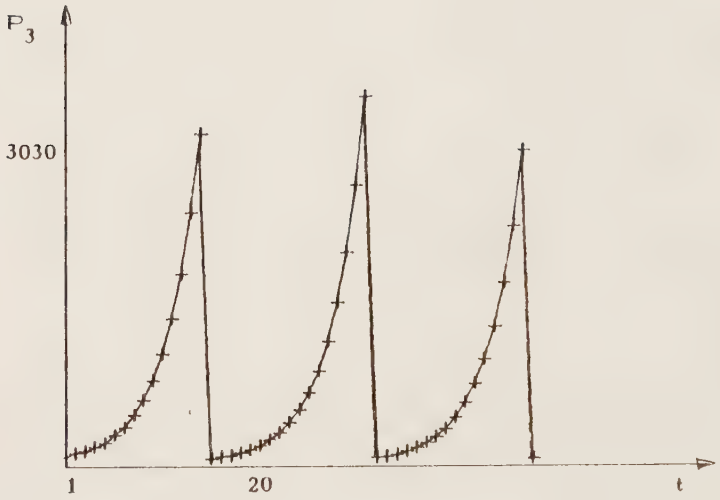


Abb. 8 durchschnittlich 4-jährige Zyklen

Die in Abbildung 8 dargestellte Form der Populationsentwicklung wollen wir "zyklisch-exponentiell" nennen.

Einen Mangel des Modells zeigt Abb. 8 auf. Es treten Populationen mit weit über 3030 Mäusen auf. Das liegt daran, daß gemäß dem Modell die Population in Sprüngen ansteigt und der Zusammenbruch erst simuliert wird, wenn die kritische Siedlungsdichte übersprungen ist.

Dieses Verhalten kann vermieden werden, wenn wir das sprunghafte Wachstum durch ein stetiges ersetzen. Dies soll im nächsten Abschnitt geschehen.

3.2.4 Eine geschlossene Form für das Wachstum - Modell III

Der Verlauf der Populationsentwicklung der Mäuse soll jetzt in geschlossener Form dargestellt werden. Dies soll nicht über Eigenwerte der Transformationsmatrizen geschehen, sondern es wird ein schulgemäßer Weg beschritten.

Ein Vergleich der Werte $P_{i,t+1}$ und $P_{i,t}$ (i=1, 2, 2, 4) aus Tab.2 ergibt, daß sich ihr Quotient auf einen konstanten Wert einpendelt, außer an den Stellen des Kollapses.

Somit gilt

$$P_{i,t+1} = \alpha_i \cdot P_{i,t}, \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

oder

$$P_{i,t} = \alpha_i^t \cdot P_{i,0}, \tag{1}$$

und die Populationen verhalten sich entsprechend den Gliedern einer geometrischen Folge.

Im einzelnen sind $\alpha_1 \approx 0{,}9$; $\alpha_2 \approx 1{,}133$; $\alpha_3 \approx 1{,}32$; $\alpha_4 \approx 1{,}48$. Ersetzen wir α_i durch e^{k_i}, so geht (1) über in

$$P_{i,t} = P_{i,0} e^{t \cdot k_i}, \qquad k_i \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Für P_3 soll k_3 bestimmt werden. Es ist $P_{3,0}=68$ und z.B. $P_{3,13}=2531$. In (2) eingesetzt und nach Logarithmierung ergibt sich

$$\ln 2531 = \ln 68 + 13 k_3$$

$$k_3 \approx 0{,}278.$$

Bis zum ersten Zusammenbruch kann der Populationsverlauf von P_3 durch die Exponentialgleichung

$$P_{3,t} = 68 \cdot e^{0,278t}, \qquad t = 0, 1, \ldots, 14$$

approximiert werden.

Ein längerer Computerdurchlauf zeigt, daß die Zyklen durchschnittlich 16 Generationen lang sind. Eine grobe Annäherung für P_3 ist dann

$$P_{3,t} = 68e^{0,278t \bmod 16}, \qquad t \in \mathbb{N}_0$$

Das bisher angenommene sprunghafte Wachstum ($t \in \mathbb{N}_0$) soll jetzt ersetzt werden durch stetiges Wachstum in dem t aus $\mathbb{R}_0^+$ wählbar ist. Wir benützen ab jetzt - in der üblichen Schreibweise - zur Darstellung des Populationsanstiegs die Funktionsgleichung

$$P(t) = P(0)e^{tk}, \qquad t \in \mathbb{R}_0^+. \tag{3}$$

Eine Computersimulation auf der Grundlage der Exponentialfunktion (3) gewährleistet, daß bei der Maximalzahl von 3030 Individuen pro ha der Kollaps eintritt, falls die Schrittweite genügend klein ist.

3.2.5 Betrachtung zur Schädlingsbekämpfung

Im folgenden wollen wir uns mit dem Schaden beschäftigen, den eine Mäusepopulation P anrichtet.

Der Schaden Δs ist für die Zeitspanne Δt bei konstanter Population sicher proportional zu Δt

$$\Delta s \sim \Delta t,$$

und $\Delta S = P \cdot \Delta t$ (Abb. 9a) ein Maß für den Schaden. Bei dem Populationsverlauf P(t) ist dann das bestimmte Integral (Abb. 9b).

$$S = \int_{t_a}^{t_e} P(t)dt = \int_{}^{T} P(t)dt$$

ein Maß für den Schaden, den eine Mäusepopulation in dem Betrachtungszeitraum $T = [t_a, t_e]$ anrichtet.

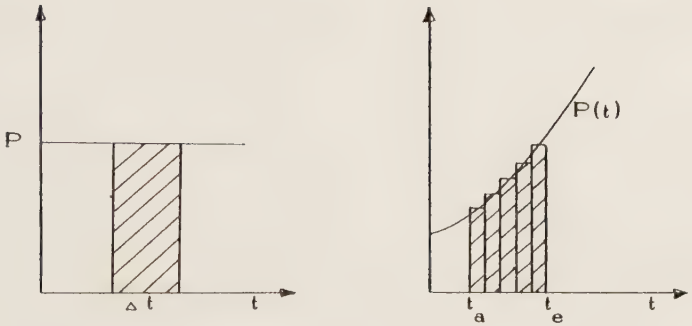


Abb. 10

Eine Vergröberung gegenüber den Verhältnissen in der Natur bei der Bestimmung von S soll vorgenommen werden. Der Zeitraum vom Zeitpunkt größter Dichte bis zum Neubeginn eines Zyklus wird nicht berücksichtigt. Das kann damit gerechtfertigt werden, daß dieser Zeitraum in der Natur in den Winter fällt, die Vorratsanhäufung aber im Herbst beendet wird.

Eine mögliche Maßnahme zur Schädlingsbekämpfung wäre die Erhöhung der Sterblichkeitsraten gegenüber den natürlichen Raten. Da Mäuseplagen immer wieder vorkommen, gehen wir davon aus, daß Bekämpfungsmaßnahmen zwar die Sterblichkeitsraten erhöhen, das Anwachsen einer Population nur verlangsamen, nicht aber verhindern können.

Seien nun F_1 und F_2 Populationen mit unterschiedlichen Überlebensraten und zyklisch exponentiellem Wachstum. Der Populationsanstieg lasse sich erfassen mittels der Funktionen

$$F_1 : t \longmapsto Ae^{p_1 t}$$
$$F_2 : t \longmapsto Ae^{p_2 t} \qquad p_1, p_2 \in Q^+ .$$

A ist die Anfangspopulation zum Zeitpunkt t = 0. Für beide Populationen kommt es zum Kollaps und zum Neubeginn eines Zyklus, wenn die Maximalzahl von M Individuen eine bestimmte Fläche bevölkern.

Der Zeitpunkt t_1 für den ersten Kollaps von F_1 ergibt sich aus

$$M = Ae^{p_1 t_1}$$

durch Logarithmierung:

$$t_1 = \frac{\ln M - \ln A}{p_1} \qquad (4)$$

Entsprechend ist der Zeitpunkt t_2 des ersten Kollaps von F_2:

$$t_2 = \frac{\ln M - \ln A}{p_2} \qquad (5)$$

Die Maße S_1 und S_2 für die Schädlichkeit je Zyklus sind dann

$$S_1 = \int_0^{t_1} Ae^{p_1 t}\, dt = \frac{A}{p_1}\left[e^{p_1 t}\right]_0^{t_1} = \frac{A}{p_1}\left(e^{\ln M - \ln A} - 1\right)$$

$$= \frac{M - A}{p_1}$$

und

$$S_2 = \int_0^{t_2} Ae^{p_2 t}\, dt$$

$$S_2 = \frac{M - A}{p_2} .$$

Nehmen wir an, daß nach einem Zeitraum T von l_1 Zyklen von F_1 und l_2 Zyklen von F_2 beide Populationen gemeinsam einen neuen Zyklus beginnen ($l_1, l_2 \in N$). Dann gilt wegen $T = l_1 \cdot t_1 = l_2 \cdot t_2$

$$l_2 = l_1 \cdot \frac{t_1}{t_2} \qquad (6)$$

Das Maß $S_1(T)$ für die Schädlichkeit von F_1 nach l_1 Zyklen ist

$$S_1(T) = \frac{l_1}{p_1} (M - A).$$

Für F_2 gilt nach l_2 Zyklen:

$$S_2(T) = \frac{l_2}{p_2} (M - A). \qquad (7)$$

Nach Einsetzung von (6) geht (7) über in

$$S_2(T) = \frac{l_1 \cdot t_1}{p_2 \cdot t_2} (M - A). \qquad (8)$$

(4) und (5) eingesetzt in (8) ergibt

$$S_2(T) = \frac{l_1}{p_1} (M - A).$$

Somit ist

$$S_1(T) = S_2(T), \qquad (9)$$

und die Populationen F_1 und F_2 richten auf lange Sicht den gleichen Schaden an. Bekämpfungsmaßnahmen, die die Sterberate erhöhen, aber dennoch ein Wachstum der Population zulassen, sind also kein adäquates Mittel zur Mäusebekämpfung.

Das mathematische Modell erweist sich hier als Instrument der Entscheidungshilfe für oder gegen bestimmte geplante Maßnahmen in der Natur. Es wirkt zeitsparend und kostensparend, da die Erkenntnis (9) nicht durch Versuche in der Realität, sondern durch entsprechende Versuche am Modell gewonnen wurde.

Gibt es keine Möglichkeit das Wachstum von Mäusepopulationen so zu beeinflussen, daß sie geringeren Schaden anrichten?

Einige heuristische Überlegungen sollen die Frage beantworten.

Betrachten wir die Abb. 10a mit den Graphen für stetiges natürliches Wachstum $\bar{P}_3=Ae^{kt}$ und 4jährigen Zyklus sowie für stetiges Wachstum unter dauernder Bekämpfung $\bar{P}_2=Ae^{1/2kt}$ mit 8jährigem Zyklus.

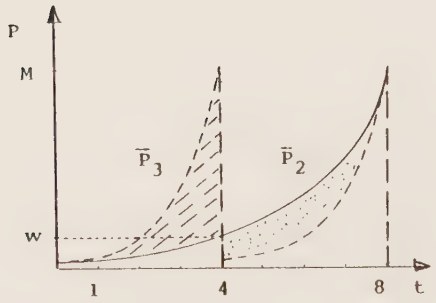


Abb. 10a

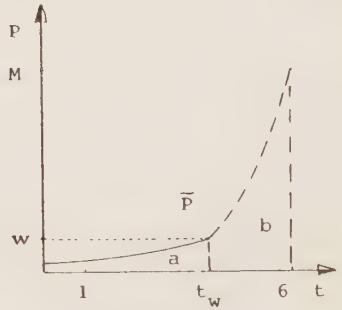


Abb. 10b

(Jahre)

$\bar{P}_2$ zeigt gegenüber $\bar{P}_3$ in den ersten vier Jahren eine um den schraffierten Teil geringere Schädlichkeit. In den zweiten vier Jahren ist die Schädlichkeit von $\bar{P}_2$ um den punktierten Teil größer. (9) beinhaltet, daß die markierten Flächen gleich sind. (Abb. 10a kann auch benützt werden, um (9) als Vermutung zu formulieren für den Spezialfall $t_2=2t_1$).

Der "gute" Teil $a = \int_0^4 \bar{P}_2(t)dt$ von $\bar{P}_2$ ist also der flache Anstieg in den ersten vier Jahren, der "schlechte" Teil $c = \int_4^8 \bar{P}_2(t)dt$ ist die breite Spitze. Bei $\bar{P}_3$ wirkt sich der rasche Anstieg ungünstig aus, während die schmale steile Spitze $b = \int_2^4 \bar{P}_3(t)dt$ "gut" ist.

Es liegt nun nahe eine Populationsentwicklung $\bar{P}$ zu erzeugen, die eine Kombination der guten Teile von $\bar{P}_2$ und $\bar{P}_3$ ist. Beispielsweise so, daß eine Population nach einem Kollaps vier Jahre bekämpft wird und danach läßt man ihr zwei Jahre freien Lauf (Abb. 10b). So kommt es nach sechs Jahren zum Kollaps,

denn es ist $\bar{P}_2(4) = A \cdot e^{1/2 \cdot 4k} = Ae^{2k} = \bar{P}_3(2) = w$. Der gute Teil von P_3 kann an den guten Teil von $\bar{P}_2$ "angeschlossen" werden.

Es ist also

$$\bar{P}(t) = \begin{cases} \bar{P}_2(t) & \text{für } 0 \leq t \leq 4 \text{ (Jahre)} \\ \bar{P}_3(t) & \text{für } 4 \leq t \leq 6 \text{ (Jahre)} \end{cases}$$

Richtet nun $\bar{P}$ geringeren Schaden an als $\bar{P}_2$ (oder $\bar{P}_3$)? Betrachten wir einen Zeitraum von 24 Jahren mit 3 Zyklen von $\bar{P}_2$ und 4 Zyklen von $\bar{P}$ in Abb. 11.

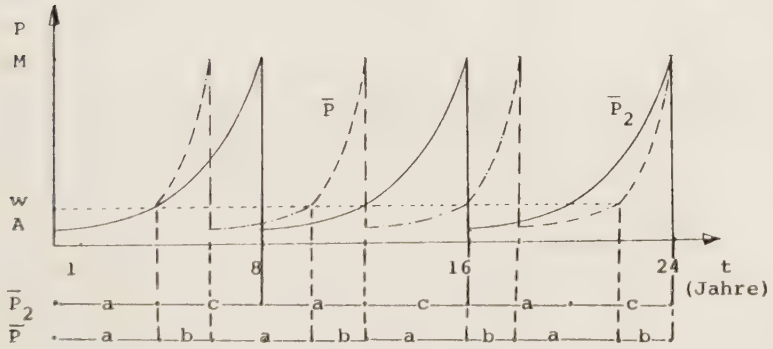


Abb. 11

$\bar{P}_2$ richtet in 24 Jahren den Schaden $S(\bar{P}_2)=3a+3c$ an und $\bar{P}$ den Schaden $S(\bar{P})=4a+4b$. Da b und c die Bedingung erfüllt, die zu (9) gehört, ist $4b=2c$. Dann ist

$$S(\bar{P}_2) - S(\bar{P}) = 3c-4b-a = c-a,$$

und

$$c-a = \int_4^8 \bar{P}_2(t)dt - \int_0^4 \bar{P}_2(t)dt > 0,$$

da $\bar{P}_2$ monoton steigend für $0 \leq t \leq 8$. Die Population $\bar{P}$ erzeugt also nach 24 Jahren einen geringeren Schaden als $\bar{P}_2$ oder $\bar{P}_3$. Für genügend großes t gilt dann

$$S(\bar{P}_2) - S(\bar{P}) > 0.$$

Das Ergebnis kann auch gewonnen und veranschaulicht werden durch einfaches Umordnen der Flächenstücke aus Abb. 11, wie Abb. 12 zu entnehmen ist.

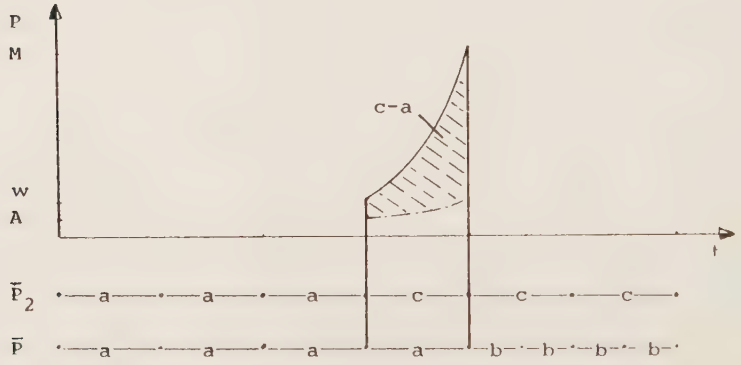


Abb. 12

Weitere Fragen sind in diesem Zusammenhang interessant.

- Welche Auswirkung auf die Schädlichkeit ergibt sich, wenn man nach anfänglicher Bekämpfung natürliches Wachstum immer frühzeitig einsetzen läßt, wenn also t_w klein wird?

Dann gilt

$$\lim_{t_w \to 0} \bar{P}(t_w) = \bar{P}_3$$

und

$$\lim_{t_w \to 0} (S(\bar{P}_2) - S(\bar{P}, t_w)) = 0.$$

Entsprechendes gilt, wenn natürliches Wachstum immer später einsetzt, also für $t_w \to 8$:

$$\lim_{t_w \to 8} \bar{P}(t_w) = P_2$$

und $$\lim_{t_w \to 8} (S(\bar{P}_2) - S(\bar{P}, t_w)) = 0. \qquad (12)$$

Aus (10), (11) und (12) erkennt man, daß es ein t_w gibt, sodaß $S(P_2) - S(P, t_w)$ maximal wird.

- Welche Auswirkung auf die Schädlichkeit ergibt sich, wenn eine Population nach einem Zusammenbruch beispielsweise zwei Jahre natürlich wächst, dann aber bis zum Kollaps bekämpft wird?

Die Antwort kann entsprechend den Abb. 10, 11 und 12 gefunden werden, innerhalb von 24 Jahren liegt die Schädlichkeit um c-a über der von P_3. Es ist also sicher falsch bei bevorstehender Überbevölkerung die Mäuse zu bekämpfen.

3.3 Populationsentwicklung und Transformationsmatrizen

In Abschnitt 2. und Tabelle 2 wurden einige Formen der Populationsentwicklung angegeben. Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen der Transformationsmatrix A und der Populationsentwicklung durch die Bestimmung von Eigenwerten und einer genauen Betrachtung der Koeffizienten von A dargelegt werden.

Von Interesse ist die besondere Struktur der in der Populationsdynamik auftretenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 & \cdots & v_{n-2} & v_{n-1} \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \qquad (13)$$

Die a_j sind die Überlebensraten, die v_j Vermehrungsraten $j=1, \ldots, n-1$) für die Altersgruppen oder Entwicklungsstadien.

Bei der Eigenwertaufgabe handelt es sich darum zu einer quadratischen n x n Matrix A Vektoren x_i zu finden, sodaß

$$Ax_i = \lambda_i x_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{14}$$

wobei λ_i die Eigenwerte von A sind, die man durch Lösen der Gleichung

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

erhält (E ist Einheitsmatrix).

Stellt nun der Vektor w_0 die Ausgangspopulation dar, wobei seine Komponenten die Anzahl der Individuen pro Altersgruppe sind, Wir bilden mittels A die iterierten Vektoren

$$\begin{aligned} w_1 &= Aw_0 \\ w_2 &= Aw_1 = A^2 w_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_t &= Aw_{t-1} = A^t w_0, \qquad (t=1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{15}$$

und entwickeln w_0 nach den Eigenvektoren x_i

$$w_0 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Wenden wir (15) und (14) an, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_1 c_1 x_1 + \ldots + \lambda_n c_n x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w_t &= \lambda^t_1 c_1 x_1 + \ldots + \lambda^t_n c_n x_n. \end{aligned}$$

Ist nun $c_1 \neq 0$ und

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$$

so gilt für große t:

$$w_t \rightarrow \lambda_1^t c_1 x_1$$

und für die Komponenten $W_{i,t}$ und $W_{i,t+1}$ aufeinanderfolgender Populationsvektoren w_t und w_{t+1}

$$\frac{W_{i,t+1}}{W_{i,t}} \longrightarrow \lambda_1.$$

Somit ist die Wachstumsrate gleich λ_1 und der Populationsverlauf durch die Glieder einer geometrischen Reihe anzunähern und somit exponentiell beschreibbar.

Fall 1: Ist nun $\lambda_1 > 1$ so wächst die Population.

Fall 2: Ist $\lambda_1 = 1$, so pendelt sich die Population auf einen konstanten Wert ein. Zur Veranschaulichung diene folgendes Beispiel. Die Ausgangspopulation sei w_0 = (100, 100, 100) und Überlebens- und Vermehrungsraten in der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$ zusammengefaßt.

Die Eigenwerte ergeben sich aus,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 3 \\ 1/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

und Entwicklung nach der 1. Spalte:

$$-\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} - 1/2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1/3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda^3 + 1/2\lambda + 1/2 = 0$$

Eine Lösung ist $\lambda_1 = 1$, und die beiden restlichen sind $\lambda_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{i}{2}\right)$; $\lambda_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{i}{2}\right)$.

Also ist

$$\lambda_1 > |\lambda_2| = |\lambda_3| ,$$

und die Population muß sich auf einen konstanten Wert einpendeln. Eine Computerzeichnung (Abb. 13) bestätigt dies.

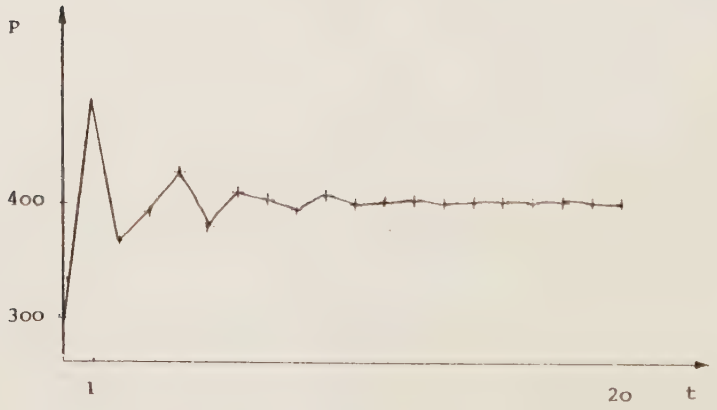


Abb. 13

Der Computerausdruck zeigt, daß sich die Gesamtpopulation auf den Wert 400 einpendelt mit der Altersverteilung w_t = (240, 120, 40). Hieran kann man die Frage anschließen: Welche Beziehung muß zwischen den Koeffizienten bestehen damit $\lambda_1=1$ ist für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$ oder allgemeiner für (14) ?

Fall 3: Ist $\lambda_1 < 1$ so stirbt die Population aus, der Graph der Population nähert sich der t-Achse asymptotisch. Ebenfalls aussterbende Population erhält man, wenn irgend eine Norm von A kleiner als 1 ist, dann gilt $A^t \to 0$ für große t. Aus (15) ersieht man, daß $w_t \to 0$, wenn $A^t \to 0$.

Fall 4: Neben dem "asymptotischen Aussterben" wäre denkbar, daß eine Population genau zum Zeitpunkt $t = m \in \mathbb{N}$ (also nach m Iterationsschritten) ausgestorben ist. Dann gilt für den m-ten iterierten Vektor: $w_m = 0$.

Das ist sicher der Fall, wenn $A^m = 0$. Dies gilt, wenn A singulär und ihre Eigenwerte Null sind (siehe ZURMÜHL, 1964, S. 276).

Dieser Fall kann bei einer Matrix der Bauart (14) nicht eintreten, da $a_1, \ldots, a_{n-1}$, und v_{n-1} sinnvollerweise ungleich Null sein müssen und somit die Matrix nicht singulär ist.

Fall 5: Der in Tabelle 2 und Abb. 8 dargestellte zyklische Populationsverlauf wird nicht allein durch die linearen Transformationen erzeugt, sondern mittels der Bedingung, daß ab einer bestimmten Siedlungsdichte der Kollaps eintritt. Daß ein zyklischer Verlauf auch allein mit linearen Transformationen erzeugt werden kann, zeigt das Beispiel aus der 6. Klasse. Diese Situation tritt sicher dann ein, wenn es ein $m \in N$ gibt, sodaß

$$A^m = E. \qquad A \text{ heißt dann zyklisch.} \qquad (16)$$

Es ist dann $w_m = w_o$ und allgemeiner $w_{nm} = w_o (n \in \mathbb{N})$. Die Ausgangspopulation wiederholt sich also nach nm Iterationen (siehe Abb. 4).

Eine Matrix mit der Eigenschaft (16) liegt dann vor, wenn alle ihre Eigenwerte m - te Einheitswurzeln sind

$$\lambda_i = \sqrt[m]{1}.$$

Um nun nicht immer mit Eigenwerten hantieren zu müssen, soll gezeigt werden, welche Bedingung zwischen den Koeffizienten von A gelten, damit (16) erfüllt ist.

Beginnen wir mit einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & v_2 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Für diese konnten schon die Schüler der 6. Klasse vermuten, daß sie zyklisch ist, wenn $a_1 \cdot a_2 \cdot v_2 = 1$ ist.

Beweis: Die charakteristische Gleichung

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & v_2 \\ a_1 & -\lambda & 0 \\ 0 & a_2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + a_1 a_2 v_2 = 0$$

hat die Lösung 1, wenn $a_1 a_2 v_2 = 1$.

Hier kann man Fragen anschließen:

- Läßt sich die Bedingung verallgemeinern auf Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & v_{n-1} \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

- Gibt es zyklische Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_2 \\ a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \end{pmatrix}$$ oder allgemeiner der Form (13)?

Im Zusammenhang mit Matrizen, deren betragsgrößte Eigenwerte 1 sind, können Populationsvektoren bestimmt werden, sodaß die iterierten Populationsvektoren konstant bleiben. Die Bestimmung eines solchen Vektors gelingt durch die Lösung des Systems $Aw_t=w_t$. (Ist dieses System lösbar mit $w_t=0$ so besagt dies gerade, daß ein Eigenwert 1 ist.)
An dem Beispiel A = B sieht das so aus:

$$\begin{pmatrix} W_{1,t} \\ W_{2,t} \\ W_{3,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{1,t} \\ W_{2,t} \\ W_{3,t} \end{pmatrix}$$

(III) in (I) eingesetzt ergibt (I'): $W_{1,t}=2W_{2,t}$. Da (I') und (II) übereinstimmen, sind die Gleichungen abhängig und beispielsweise $W_{3,t}$ kann beliebig gewählt werden: $W_{3,t} = \mu$. Dann ist $W_{2,t} = 3\mu$ und $W_{1,t} = 6\mu$. Ein Populationsvektor $(6\mu, 3\mu, \mu)$ reproduziert sich also nach jedem Jahr. (Wegen des konkreten Kontextes ist μ sinnvollerweise aus $\mathbb{N}_0$ zu wählen.)

4. Computer- und graphenorientiertes Verfahren zur Bestimmung chemischer Summenformeln und zur Strukturaufklärung - ein Beispiel zur Anwendung von Mathematik im Chemieunterricht

4.1 Einleitung

Man wird sicher fragen können, ob dieses Thema überhaupt zur Mathematikdidaktik gehört. Bei einer Antwort sollte berücksichtigt werden, daß es Probleme gibt, die nicht isolierte Probleme einer einzigen Fachdidaktik sind. Hier arbeiten Chemie- und Mathematikdidaktik zusammen.
Das Beispiel, das hier besprochen wird, paßt sich gut in eine Bemerkung des Chemikers C.A. Coulson ein, der schrieb: "Mathematik und Chemie sind Partner geworden". Es gehört sicher zu den Zielen des Mathematikunterrichts und des Chemieunterrichts, dieses partnerschaftliche Verhältnis offenzulegen. Von dieser Beziehung ist aber in der Schule wenig zu spüren, denn für den Chemieunterricht gilt das gleiche wie für den Physikunterricht, an dem Freudenthal kritisiert, daß er entmathematisiert betrieben wird, und aus den Mathematikschulbüchern wissen wir, daß dort nicht viel unternommen wird, um Beziehungen zur Chemie zu knüpfen.
Bevor ich nun ein chemisches Problem schildere, bei dessen Lösung Mathematik und Computer eine bedeutende Rolle spielen, möchte ich den Hintergrund beschreiben, vor dem das Beispiel gewachsen ist.
An der PH in Dortmund sind die Fächer Biologie, Mathematik, Chemie und Physik in einem Fachbereich zusammengeschlossen. Die einzelnen Fächer arbeiten gelegentlich zusammen. Ein Beispiel dafür ist das Chemie-Mathematik-Seminar, das im Jahre 1975 unter der Leitung des Chemiedidaktikers H.-J. Schmidt und des Mathematikdidaktikers E. Wittmann stand. Studenten trugen dort über Schulchemieprojekte vor unter Betonung des mathematischen Gehalts. Das war nicht besonders befriedigend. Erst als H.-J. Schmidt in den letzten

beiden Stunden einige Probleme vorbrachte, die von der chemiedidaktischen Seite unbefriedigend gelöst sind, wurde die Sache auch für den Mathematikdidaktiker interessant, so daß es zu einer Wechselwirkung zwischen Chemie- und Mathematikdidaktik kommen konnte. Eines dieser Probleme ist, wie man die Summenformeln von Bausteinen von Polyvinylchlorid (PVC) bestimmt.

4.2 Ein Problem: Bausteine von Polyvinylchlorid

4.2.1 Aus der Sicht des Chemikers

PVC ist ein Stoff, der aus Riesenmolekülen aufgebaut ist. Von diesen wird angenommen, daß sie aus kleinen Bausteinen zusammengesetzt sind. Der Baustein von PVC wird meist durch die Summenformel - C_2ClH_3 - oder durch die entsprechende Strukturformel (Abb. 1) angegeben.

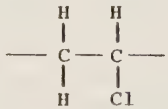


Abb. 1 Strukturformel eines PVC-Bausteins

Dieser Baustein, oftmals aneinandergesetzt, ergibt das PVC-Molekül.
Die Bestimmung von Bausteinen beruht auf folgender Methode, die in zwei Schritte zerfällt.
In einem ersten Schritt wird eine qualitative Analyse durchgeführt, um die am Aufbau der vorgegebenen Substanz beteiligten Elemente zu ermitteln. Hier sind es Kohlenstoff, Wasserstoff und Chlor mit den Elementbezeichnungen C, H und Cl.
Der zweite Schritt besteht aus einer quantitativen Elementaranalyse, in der der Massenanteil eines Elements ermittelt wird. In dem vorliegenden Fall ist es der Chloranteil

W (Cl), der bei Schülerexperimenten zwischen etwa 0,49 und 0,65 eingegrenzt werden kann.

Der Chemiker hat zur Auswertung der quantitativen Elementaranalyse eine Heuristik entwickelt: Er geht davon aus, daß der Massenanteil von Wasserstoff wegen der Atommasse 1 u vernachlässigt werden kann, da Kohlenstoff und Chlor die Atommassen 12 u und 35,5 u haben. Er sucht dann das Atomzahlenverhältnis von Chlor und Kohlenstoff, das sich durch

$$\frac{0,57}{35,5} : \frac{0,43}{12} \approx 1 : 2$$

bestimmt, wobei 0,57 ein mittlerer Massenanteil von Chlor ist und 0,43 der für Kohlenstoff verbleibende. Die übriggebliebenen freien Valenzen von Kohlenstoff werden mit Wasserstoff abgesättigt, so daß wir den vorher gezeigten Baustein bekommen.

Es gibt aber weitere Bausteine, die den experimentellen Bedingungen genügen. Wie bekommt man sie ?

run
BAUSTEINE AUS CL, C UND H
OBERE SCHRANKEN FUER E 1, E 2, E 3, MAX. ABWEICHUNG VON W
? 40, 40, 40, 0.08

ANZAHL DER CL ATOME	ANZAHL DER C ATOME	ANZAHL DER H ATOME	ABWEICHUNG VON 0,568
1	2	3	0
2	3	4	7.163966E 02
2	4	6	0
3	5	7	4.583287E 02
2	5	8	-5.720860E 02
4	6	8	7.163966E 02
3	6	9	0
4	7	10	3.369492E 02
3	7	11	-3.946400E 02
5	8	11	5.590159E 02
4	8	12	0
6	9	12	7.163966E 02
3	8	13	-7.380044E-02
5	9	13	2.663980E 02
4	9	14	-3.012121E 02
6	10	14	4.583287E-02
5	10	15	0
4	10	16	-5.720860E 02
5	11	17	-2.435529E 02
5	12	19	-4.670775E-02

Abb. 2 Tabelle der möglichen Bausteine für PVC, wenn der Chloranteil zwischen 0,49 und 0,65 liegt.

4.2.2 Aus mathematischer Sicht

Aus mathematischer Sicht ist eine Summenformel $C_{e_1}Cl_{e_2}H_{e_3}$ ein Tripel (e_1, e_2, e_3) natürlicher Zahlen.
Es sind diejenigen gesucht, für deren Chloranteil W (Cl) die Bedingung gilt:

$$0{,}49 \leq W(Cl) \leq 0{,}65 \quad , \qquad (1)$$

wobei der Chloranteil durch

$$W(Cl) = \frac{35{,}5e_2}{12e_1 + 35{,}5e_2 + e_3}$$

bestimmt wird. Außerdem gilt die Bedingung

$$e_1 = \frac{1}{2}(e_2 + e_3) \quad . \qquad (2)$$

Es liegt nahe, die Bedingungen (1) und (2) mit dem Computer auszuwerten.
Unendlich viele Tripel erfüllen (1) und (2). Damit der Computer nicht ewig weiterrechnet, geben wir eine obere Grenze für die Masse der Bausteine an. In diesem Fall liegt sie bei 400 u. Folgende Bausteine werden ausgedruckt: (sh.Abb.2)
Betrachten wir die Tabelle, so erkennen wir, daß Vielfache von kleinen Bausteinen aufgeführt sind und verschiedene kleine Bausteine zu größeren zusammengesetzt sind, wie $-C_2Cl_1H_3-$ und $-C_3Cl_2H_4-$ zu $-C_5Cl_3H_7-$. Die Aussage, $-C_2ClH_3-$ sei der Baustein von PVC, wird jetzt als Idealisierung erkannt.
Die Tabelle enthält auch Bausteine wie $-C_3Cl_2H_4-$ oder $-C_5Cl_2H_8-$ (Abb. 3), die sich von dem Idealbaustein $-C_2ClH_3-$ dadurch unterscheiden, daß ihnen weitere Chloratome bzw. Wasserstoffatome als "Störgrößen" eingestreut sind. Aus den Meßergebnissen kann also nicht gefolgert werden, daß PVC-Moleküle schön regelmäßig aufgebaut sind. Der Schüler erkennt auch, daß die Vielfalt der Bausteine geringer wird, wenn die Meßwertschranken enger gezogen werden können, was für den Schüler sicher ein Antrieb ist, sorgsam

zu experimentieren.

Abb. 3 Bausteine mit besonders hohem Chloranteil bzw. besonders hohem Wasserstoffanteil

Nebenbei soll bemerkt werden, daß dieses Verfahren - und andere Dinge, auf die wir später eingehen wollen - im Rahmen einer GDCh-Fortbildung mit S-II-Lehrern behandelt werden konnte. Es wurde dort in Fünfergruppen gearbeitet, wobei pro Gruppe 3 Stunden zur Verfügung standen. Besonders wichtig schien mir, die Chmielehrer von der Harmlosigkeit des Programmierens zu überzeugen, damit solche Dinge auch in der Schule übernommen werden. Von der ersten Minute an benutzte man den Computer: Begonnen wurde mit der Programmierung eines Terms zur Bestimmung des Chloranteils, dann wurde die Bedingung eingebaut, daß ein Tripel nur ausgedruckt wird, wenn der Chloranteil zwischen 0,49 und 0,65 liegt usw., bis das ganze Programm erstellt war.
Am Ende der drei Stunden hatte jeder der Lehrer das Programm verstanden und zumindest einige konnten auch die erworbenen Programmierkenntnisse weiter anwenden, wie eine kleine Hausaufgabe für den nächsten Tag zeigte. Auf diese gehen wir nun ein.

4.3 Summenformeln niedermolekularer "Baummoleküle"

4.3.1 Die vier Schritte der Verfahrens

Aufgabe: Gesucht ist die Summenformel eines Chlorkohlenstoffs, dessen Chloranteil zwischen 0,85 und 0,95 und dessen Molmasse zwischen 189 und 285 g liegt. (Das Molekül enthält keine Ringe und Doppelbindungen).
Schreiben Sie ein Programm !

Die Aufgabe soll ein Anknüpfungspunkt sein, um einen dritten und vierten Schritt zu explizieren, die in dem vorangegangenen Verfahren schon implizit behandelt wurden.
Diese Aufgabe unterscheidet sich von der Polyvinylchloridaufgabe besonders dadurch, daß kein Riesenmolekül vorliegt und man somit nicht an Bausteinen, sondern der Summenformel des Moleküls selbst interessiert ist.
In der Aufgabe sind alle Daten direkt und indirekt enthalten, die uns zur Lösung führen:

Schritt 1 - die qualitative Analyse ergibt laut Aufgabe Chlor und Kohlenstoff. Also ist in einer Summenformel $C_{e_1} Cl_{e_2}$ das Paar (e_1, e_2) gesucht.

Schritt 2 - die quantitative Analyse ergibt die Bedingung

$$0{,}85 \leq \frac{35{,}5e_2}{35{,}5e_2 + 12e_1} \leq 0{,}95. \qquad (3)$$

Man kann einen Computer so programmieren, daß in einem e_1-e_2-Koordinatensystem die Gitterpunkte markiert werden, für die (3) erfüllt ist. In Abbildung 4 wurde bis $e_1 = 12$ und $e_2 = 24$ gezeichnet. 110 Summenformeln erfüllen dann (3).

Schritt 3 - die Molmassenbestimmung ergibt die Bedingung

$$189 \leq 12e_1 + 35{,}5e_2 \leq 285 . \qquad (4)$$

```
run
CHLORKOHLENSTOFFE CCLGR1B
-------------------------

OBERE SCHRANKEN VON C,CL.CL-ANTEIL,MAX ABWEICUNG
  ?   15,25,0.9,0.05

-----0----5---ANZAHL DER CL-ATOME---->
 1      *****
 2        *********
 3          ***************
 4            ******************
 5              ****************
 6                **************
 7                  ************
 8                    *********
 9                      *******
 10                       *****
 11                         ***
 12                          **
 13
 14
 15
ES KOMMEN  110  MOLEKUELE IN BETRACHT
EDIT
```

Abb. 4a Mögliche Summenformeln als Gitterpunkte; dargestellt nach Berücksichtigung des Chloranteils

Abb. 4b Mögliche Summenformeln als Gitterpunkte; dargestelltnach Berücksichtigung des Chloranteils und einer Molmassenbestimmung

```
run
CHLORKOHLENSTOFFE CCLMWGR
-------------------------
OBERE SCHRANKEN FUER C,CL.MOLMASSE.CL-ANTEIL.MAX ABWEICUNG DAVON
  ?   10,35,237,0.9,08,0.05

-----0----5-----ANZAHL DER CL-ATOME---------->
 1         **
 2         ***
 3          **
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
ES KOMMEN 7    SUMMENFORMELN IN BETRACHT
EDIT
```

Kombinieren wir Bedingung (3) und (4), so erhält man noch 7 Summenformeln angeboten. Darunter sind solche wie CCl_5, die wegen der Vierwertigkeit von Kohlenstoff und Einwertigkeit von Chlor nicht möglich sind.

Schritt 4 - Allgemeine Summenformel. Es gilt die Bedingung

$$e_2 = 2e_1 + 2 , \qquad (5)$$

welche mit der für Kohlenwasserstoffe allgemein bekannten Summenformel $C_{e_1}H_{2e_1+2}$ übereinstimmt. Ein Computerdurchlauf mit den Bedingungen (3), (4) und (5) liefert noch eine Summenformel

$$C_2Cl_6.$$

Die geometrische Interpretation des Verfahrens ist klar: Gesucht ist der Gitterpunkt, der im Durchschnitt von dem durch (3), (4) und (5) bestimmten Winkelfeld, Parallelenstreifen und Geraden liegt.
Man sieht sofort, daß bei zweielementigen Verbindungen eine Massenanteilsbestimmung überflüssig ist, da durch (5) der Massenanteil an Chlor exakt festgelegt ist. Betrachten wir die einzelnen Schritte des Verfahrens, so sorgt die Molmassenbestimmung (4) für die Endlichkeit des "Suchbereichs", während die allgemeine Summenformel von besonderer Schlagkraft ist, weil es sich hier, im Gegensatz zu den experimentierten Ungleichungen (3) und (4) um eine Gleichung handelt. Wie bekommt man sie ?

4.3.2 Graphentheoretische Herleitung allgemeiner Summenformeln

Im Chemieunterricht steckt man mit Modellbaukästen einige Moleküle oder zeichnet sich einige Strukturformeln von Chlorkohlenwasserstoffen auf, fertigt eine Tabelle für die Anzahl der Atome an und entnimmt ihr (5). Dieses enaktive, ikonische Verfahren wird um so unpraktikabler, je vielelementiger eine Verbindung wird. Wie sieht z.B. eine

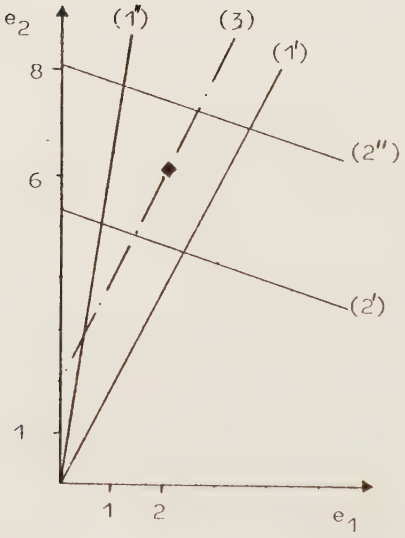


Abb. 5 Graphische Interpretation des Verfahrens

allgemeine Summenformel für eine Verbindung mit C,O,H,N aus? Es wäre wohl günstig, wenn man hier ein allgemein anwendbares ökonomisches Verfahren hätte. Mit den Anfangskenntnissen der Graphentheorie gelingt dies:
Die Brücke zwischen Graphentheorie und Chemie wird dadurch geschlagen, daß wir Graphen als Modelle von Molekülen bzw. von Strukturformeln betrachten. Dies wird leicht einsichtig, wenn wir z.B. in der Strukturformel für C_2Cl_6 (Abb. 6) die Elementbezeichnungen durch Punkte ersetzen.
Dieser Brückenschlag hat uns also in die Graphentheorie geführt, und es liegt nun nahe, Sätze der Graphentheorie für die Chemie fruchtbar zu machen. Hilfreich kann dabei ein Lexikon sein.

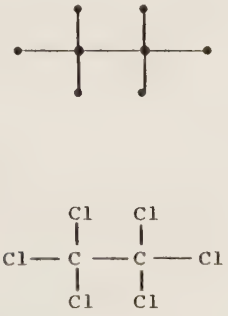


Abb. 6 C_2Cl_6 als Graph bzw. als Strukturformel dargestellt

LEXIKON

Chemie	Graphentheorie
Atom	Ecke
Bindung	Kante
Wertigkeit	Eckengrad
Summenformel	n-Tripel natürlicher Zahlen
Molekül ohne Ringe und ohne Doppelbindungen	Baum

(Das Lexikon wird später fortgesetzt)

Da Summenformeln Auskunft über die Anzahl von Atomen je Molekül geben, betrachten wir einige Sätze aus der Graphentheorie, in denen die Anzahl der Ecken in einem Graph erfaßt werden.

In Bäumen gilt die Beziehung $k = e - 1$ für die Anzahl k der Kanten und die Anzahl e der Ecken.[1] Bei einer Verbindung, die aus Kohlenstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff besteht, werden die e Ecken durch e_1 C-Atome, e_2 O-Atome, e_3 N-Atome und e_4 H-Atome repräsentiert.

Also ist $e = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ und es gibt

$$k = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 - 1 \qquad (6)$$

Kanten (Bindungen).

k kann auch durch die Eckengrade (Wertigkeiten) bestimmt werden, da die Anzahl der Kanten gleich die Hälfte der Summe aller Eckengrade ist. (Es gibt hier vier Eckengrade: $z_1 = 4$ und $z_2 = 2$, $z_3 = 3$, $z_4 = 1$.)

$$k = \frac{1}{2}\,(e_1z_1 + e_2z_2 + e_3z_3 + e_4z_4). \qquad (7)$$

Durch Gleichsetzen von (6) und (7) erhalten wir

$$(2 - z_1)e_1 + \ldots + (2 - z_4)e_4 = 2$$

und nach Einsetzen der Wertigkeiten erhält man die allgemeine Summenformel

$$-2e_1 - e_3 + e_4 = 2. \qquad (8)$$

Die dem Chemiker geläufige Schreibweise ist:

$$C_{e_1}O_{e_2}N_{e_3}H_{2e_1+e_3+2}.$$

(8) entnehmen wir, daß zweiwertige Atome keinen Einfluß

---

[1] Eine derartige Aussage kann auch 'chemisch' gelesen werden - in einem Molekül ohne Ringe und Doppelbindungen gibt es eine Bindung weniger als Atome.

auf allgemeine Summenformeln haben. Weiter ist (8) nur erfüllt, wenn die Anzahl der Atome mit ungerader Wertigkeit gerade ist, was natürlich damit übereinstimmt, daß in einem Graph die Anzahl der Ecken mit ungeradem Grad gerade ist. Beispielsweise kann ein Molekül mit der Summenformel $C_3O_2NH_8$ nicht existieren.
Zusammenfassend ergibt sich: Die allgemeine Summenformel eines baumförmigen Moleküls mit n Elementen ist

$$\sum_{i=1}^{n} (2 - z_i)e_i = 2.$$

Diese Summenformel zeigt deutlich den Ökonomisierungseffekt, den eine Mathematisierung mitbringen kann, denn mit dieser Formel sind alle chemischen Summenformeln (für Moleküle ohne Ringe und Doppelbindungen) erfaßt.

Anmerkung:
- Es gibt eine chemische Modellvorstellung, die sich mit (7) deckt: Im Anfängerunterricht wird bei der Erklärung der Bindung gelegentlich das Häkchenmodell benutzt, wo zwei Häkchen eine Bindung bilden.
- Weiteres Beispielmaterial zu Abschnitt 2 und 3 siehe in BECK/SCHMIDT (1975).

4.4 Moleküle mit Doppelbindungen und Ringen

Ein Verfahren ist besonders wertvoll, wenn es einen großen Anwendungsbereich hat. Das ist bei dem eben geschilderten vierschrittigen Vorgehen zur Bestimmung von Summenformeln der Fall, denn die Schritte 1 bis 3 können auf komplizierte Moleküle mit Mehrfachbindungen und Ringen unverändert übertragen werden. Nur Schritt 4 (die Bestimmung allgemeiner Summenformeln) muß der neuen Situation angepaßt werden, denn die komplizierten Moleküle haben keine Baumstruktur mehr, und somit ist die Formel k = e - 1 in Schritt 4 nicht mehr anwendbar. Vielmehr stützen wir uns auf die Eulersche Formel e - k + f = 2. Sie ist anwendbar, da Graphen von

Molekülen plättbar sind. Ein Blick in Chemiebücher überzeugt uns davon. Die chemische Interpretation von e und k ist klar, die von f sollte jedoch genauer betrachtet werden. Abb. 7 a zeigt die Strukturformel eines Moleküls mit Ring und Doppelbindungen. In dem zugehörigen Graphen (Abb. 7 b) sind Ring und Doppelbindung gleichermaßen eine Fläche zugeordnet.

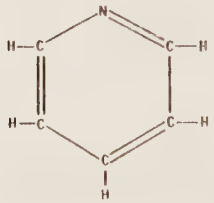


Abb. 7a Strukturformel von Pyridin

Abb. 7b Pyridin als Graph dargestellt. Einem Ring und einer Doppelbindung sind gleichermaßen eine Fläche (Land) im Graphen zugeordnet.

```
DREIELEMENTIGE ORGANISCHE VERBINDUNGEN
ERSTES ELEMENT: GEWICHTSANTEIL, ATOMGEWICHT, WERTIGKEIT
  ? 'c', 0.76, 12, 4
UEBRIGEN ELEMENTE:
  ? 'n', 14, 3, 'h', 1, 1
SCHRANKEN FUER DIE ANZAHL DER ATOME
  ? 10, 15, 15
MOLMASSENMITTELWERT, ABWEICHUNG VON M UND W, DOPPELBINDUNGEN
  ? 79, 8, 0.05, 3

C    N    H          KREISE          ABWEICHUNG VON M
     5    1    1        3               4.0
C    N    H          KREISE          ABWEICHUNG VON M
     5    1    3        2               2.0
C    N    H          KREISE          ABWEICHUNG VON M
     5    1    5        1               0.0
C    N    H          KREISE          ABWEICHUNG VON M
     5    1    7        0              - 2.0

ES KOMMEN 4 VERBINDUNGEN IN BETRACHT
```

Abb. 8 Computerausdruck für die Rechnung zur Elementaranalyse von Pyridin.

Das Lexikon kann vervollständigt werden:

Chemie	Graphentheorie
Ring, Doppelbindung	Fläche
Molekül mit Doppelbindungen und Ringen	eben zusammenhängender Graph mit Rundwegen

Es ist aber bedeutsam, zwischen Ring und Doppelbindung zu unterscheiden, da Doppelbindungen experimentell leicht nachweisbar sind, während bei Ringen teure Apparaturen hinzugezogen werden, die in der Schule nicht vorhanden sind. Die den Graphen umgebende Fläche hat in der Chemie keine

Interpretation, so daß wir die Eulersche Formel umformulieren in $e - k + r + d = 1$, wobei r die Anzahl der Ringe und d die Anzahl der Doppelbindungen je Molekül angibt. Aus den Schritten 1 bis 3 können wir e und k in gewissen Grenzen ermitteln. Ebenso gelingt die Bestimmung von d, so daß die Anzahl der Ringe aus

$$r = k - e + 1 - d \qquad (9)$$

berechnet wird und so zur Strukturaufklärung von Molekülen beitragen wird. Das ist zumindest für die Schulchemie ein bedeutsamer Punkt.

An einem Beispiel (Pyridin) soll die Arbeit mit (9) verdeutlicht werden.

Schritt 1 ergibt die Elemente Kohlenstoff, Stickstoff und Wasserstoff mit den Wertigkeiten 4,3 und 1 und den Atommassen 12 u, 14 u und 1 u.

Schritt 2 ergibt, daß der Kohlenstoffanteil zwischen 0,71 und 0,81 liegt, also hat ein Tripel (e_1, e_2, e_3) die Bedingung

$$0{,}71 \leq \frac{12e_1}{12e_1 + 14e_2 + e_3} \leq 0{,}81 \qquad (10)$$

zu erfüllen.

Schritt 3 liefert für die Molmasse die Bedingung

$$71 \leq 12e_1 + 14e_2 + e_3 \leq 87 \qquad (11)$$

Schritt 4 DR:[1)]

a) 3 Doppelbindungen werden ermittelt, also $d = 3$.

b) es ist

$$e = e_1 + e_2 + e_3 \qquad (12)$$

[1)] Wir bezeichnen hier den vierten Schritt mit DR, da er Doppelbindungen und Ringe berücksichtigt.

und $k = \frac{1}{2}\ (z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3)$. (13)

(12) und (13) in (9) eingesetzt ergibt

$$r = \frac{1}{2}\ ((z_1 - 2)e_1 + (z_2 - 2)e_2 + (z_3 - 2)e_3 + 2 - 2d)\ .$$

Wegen $z_1 = 4$, $z_2 = 3$ und $z_3 = 1$ gilt hier:

$$r = \frac{1}{2}\ (2e_1 + e_2 - e_3 - 4) \qquad (r \in N) \qquad (14)$$

Die Bedingung $r \in N$ wird gestellt, weil es ja keine negative oder gebrochene Anzahl von Ringen gibt.
Wie lassen wir hier den Computer arbeiten? Zuerst werden die Tripel herausgesucht, die (10) und (11) erfüllen, und geprüft, ob nach Einsetzen in (14) $r \in N$.
Auf dem Computer wird die Prüfung, ob $r \in N$, durch eine Abfrage auf Ganzzahligkeit und Nichtnegativität vorgenommen.
Z.B. erfüllt $C_5N_1H_6$ (10) und (11). Aber es ist

$$r = \frac{1}{2}\ (10 + 1 - 6 - 4) = \frac{1}{2} \notin N,$$

so daß solche Summenformeln nach Anwendung von (14) nicht mehr zulässig sind.
Ein weiteres Beispiel: $C_5N_1H_9$ erfüllt auch (10) und (11). Aber aus (14) erhält man $r = -1$, was nicht sein kann. Jedoch ergibt sich für $C_5N_1H_5$ ein Ring.

(14) erfüllt somit zwei Aufgaben:

1. Der Kreis der infrage kommenden Summenformeln nach den Schritten 1 bis 3 wird weiter eingeschränkt.

2. Die Anzahl der Ringe wird berechnet.

Bei den vorliegenden experimentellen Daten werden noch 4 Summenformeln angeboten (Abb. 8). Es bleibt nun Aufgabe des Chemikers, die passende Summenformel auszusuchen. Besonders augenfällig wird die Schlagkraft von Schritt 4 DR, wenn man ein eindeutiges Ergebnis bekommt. Das ist beispielsweise bei Cyclopentadien (Abb. 9) der Fall, da hier wegen des

niederen Siedepunktes von 41°C eine sehr genaue Molmassenbestimmung vorgenommen werden kann. Man erhält sofort die Summenformel C_5H_6 und einen Ring.

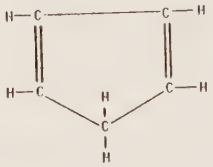


Abb. 9 Strukturformel für Cyclopentadien.

Vergleicht man die Wirkung auf die Anzahl möglicher Summenformeln, so schneidet eine Formel, die aus dem Schritt 4 gewonnen wurde, meist besser ab als eine Formel, die aus Schritt 4DR stammt. An einem Beispiel ist das leicht einzusehen. Für einen Kohlenwasserstoff ohne Doppelbindungen gilt nach Schritt 4DR die Gleichung:

$$r = \frac{1}{2}\,(2e_1 - e_2 + 2), \qquad (15)$$

wobei diejenigen Paare (e_1, e_2) gesucht werden, für die $r = 0,1,2,\ldots$. Im Schritt 4, wo man annimmt, daß keine Ringe in dem Molekül vorhanden sind, gilt die Summenformel

$$0 = 2e_1 - e_2 + 2. \qquad (16)$$

Also nur die Paare (e_1, e_2) mit $r = 0$ sind gesucht. In Abbildung 10 sind die Summenformeln markiert, die die Schritte 1 bis 3 erfüllen. Abbildung 11 zeigt die Summenformeln, die zusätzlich Schritt 4DR erfüllen.
Die Summenformeln, die Schritt 4 erfüllen, sind eingerahmt.
Das Verfahren kann natürlich auf kompliziertere und vielelementige Verbindungen angewendet werden.

```
KOHLENWASSERSTOFFE, MOL-MASSE,
MASSENANTEIL
-  - -0 - - 5- - - - - -H-ATOME- - - - - - - - -)
 1
 2
 3
 4
 5                 ******
 6               ************
 7                ********
 8
 9
10
11
12
13
14
ES KOMMEN 26 SUMMENFORMELN
IN BETRACHT
```

Abb. 10 Mögliche Kohlenwasserstoffenach Kohlenstoffanteil und Molmassenbestimmung.

```
KOHLENWASSERSTOFFE, MOLMASSE,
MASSENANTEIL
- - - - -0 - - - - 5- - - - - -H-ATOME- - - - - - - - - -)
 1
 2
 3
 4
 5                  *
 6                * * *
 7                 * * *
 8
 9
10
11
12
13
14
ES KOMMEN 8 SUMMENFORMELN
IN BETRACHT
```

Abb. 11 Wirkung des "Ringformel" (15) auf die in Abb. 10 gezeigten Summenformeln.

```
00010  PRINT 'ORGANISCHE VERBINDUNG MIT 5 ELEMENTEN'
00020  PRINT '2 ELEMENTE MIT MASSENANTEIL, ATOMMASSE, WERTIGKEIT'
00030  INPUT A$, W1, G1, Z1, B$, W2, G2, Z2
00040  PRINT 'UEBRIGEN ELEMENTE:'
00050  INPUT C$, G3, Z3, D$, G4, Z4, E$, G5, Z5
00060  PRINT 'SCHRANKEN FUER DIE ANZAHL DER ATOME'
00070  INPUT Q1, Q2, Q3, Q4, Q5
00120  PRINT 'MOLMASSENMITTELWERT, ABWEICHUNG VON M UND W, DOPPELBINDUNGEN'
00130  INPUT M, B2, B1, D
00140  F$ = 'RINGE'
00150  G$ = 'ABWEICHUNG VON M'
00160  PRINT
00161  FOR E1 = 1 TO Q1
00162  FOR E2 = 1 TO Q2
00163  FOR E3 = 1 TO Q3
00164  FOR E4 = 1 TO Q4
00165  FOR E5 = 1 TO Q5
00170  M1 = G1 * E1 + G2 * E2 + G3 * E3 + G4 * E4 + G5 * E5
00180  IF ABS (M - M1) > B2 GOTO 280
00190  W7 = (G1 * E1) / M1
00200  IF ABS (W7   W1) > B1 GOTO 280
00210  W8 = (G2 * E2) / M1
00220  IF ABS (W2   W8) > B1 GOTO 280
00230  R = (Z1 - 2) * E1 + (Z2 - 2) * E2 + (Z3 - 2) * E3 + (Z4   2) * E4 + (Z5 - 2) * E5
00231  R1 = (R - 2 * D + 2) / 2
00235  IF R1 < 0 GOTO 280
00236  IF INT (R1) < R1 GOTO 280
00237  M2 = M1 - M
00240  PRINT USING 250, A$, B$, C$, D$, E$, F$, G$
00250  :    **   **   **   **   **          ******      ***************
00260  PRINT USING 270, E1, E2, E3, E4, E5, R1, M2
00270  : **   **   **   **   **              **          ***.*
00275  N = N + 1
00276  PRINT
00280  NEXT E1
00290  NEXT E2
00300  NEXT E3
00310  NEXT E4
00320  NEXT E5
00372  PRINT
00380  PRINT 'ES KOMMEN'; N; 'VERBINDUNGEN IN BETRACHT'
00390  END
END OF DATA
```

Abb. 12 Programm zur Bestimmung der Summenformel einer Verbindung mit 5 Elementen.

Erläuterung: Die Zeilen 10 bis 130 dienen zur Eingabe von Daten, die von der Verbindung bekannt sind. Die Zeilen 161 bis 165 und 280 bis 320 erzeugen 5-Tupel (Summenformeln), für die dann in den Zeilen 170 bis 237 geprüft wird, ob sie den eingegebenen Daten genügen. Die Zeilen 240 bis 270 besorgen den Druck der Summenformeln (vgl. Abb. 13).

Man führt dann zweckmäßigerweise Massenanteilsbestimmungen von weiteren Elementen durch. (Man begründet dies mit Mitteln der linearen Algebra.) In Abbildung 12 ist ein Programm aufgelistet, das fünfelementige Verbindungen und zwei Massenanteilsbestimmungn verarbeitet. Es ist so allgemein gehalten, daß nur die Elementbezeichnungen und die experimentellen Daten eingegeben werden müssen. Abbildung 13 zeigt einen zugehörigen Ausdruck, der sich auf Saccharin bezieht. [1)]

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß der Computer das natürliche Hilfsmittel bei der Auswertung des linearen Systems ist, jedoch können die gesuchten Gitterpunkte in arbeitsteiliger Gruppenarbeit auch von Hand ausgerechnet werden. Dies führt übrigens zu der interessanten Frage, wie dies möglichst bequem geschehen kann.

```
ORGANISCHE VERBINDUNG MIT 5 ELEMENTEN
2 ELEMENTE MIT MASSENANTEIL, ATOMMASSE, WERTIGKEIT
  ? 'c', 0.46, 12, 4, 'o', 0.26, 16, 2
UEBRIGEN ELEMENTE:
  ? 's', 32, 6, 'n', 14, 3, 'h', 1, 1
SCHRANKEN FUER DIE ANZAHL DER ATOME
  ? 10, 10, 10, 10, 15
MOLMASSENMITTELWERT, ABWEICHUNG VON M UND W, DOPPELBINDEN
  ? 183, 18, 0.02, 6

C   O   S   N   H          RINGE        ABWEICHUNG VON M
    7   3   1   1   1        4            - 4.0
C   O   S   N   H          RINGE        ABWEICHUNG VON M
    7   3   1   1   3        3            - 2.0
C   O   S   N   H          RINGE        ABWEICHUNG VON M
    7   3   1   1   5        2              0.0
C   O   S   N   H          RINGE        ABWEICHUNG VON M
    7   3   1   1   7        1              2.0
C   O   S   N   H          RINGE        ABWEICHUNG VON M
    7   3   1   1   9        0              4.0

ES KOMMEN 5 VERBINDUNGEN IN BETRACHT
```

Abb. 13 Computerausdruck für Saccharin

[1)] Die Programme wurden in der Sprache BASIC geschrieben und an einem Terminal des Großrechners am Hochschulrechenzentrum Dortmund realisiert. Die Programme laufen auch auf geeigneten Tischrechnern, wie sie in Schulen benutzt werden.

4.5 Bemerkungen

Wie kann das eben beschriebene computerorientierte Verfahren in der Schule organisatorisch bewältigt werden?
Es wären verschiedene Unterrichtsformen denkbar:

a) Projekttage, an denen Mathematik- und Chemielehrer anwesend sind.
b) Koordinierter Mathematik-Chemieunterricht: Das könnte so aussehen, daß im Chemieunterricht die Versuche zu den Schritten 1 bis 3 und 4DR durchgeführt werden und im Mathematikunterricht die benötigten Gleichungen und Ungleichungen entwickelt werden sowie die Programmierung erfolgt.
c) Bearbeitung im Chemieunterricht:
Der augenblicklichen Schulsituation scheint dies am angemessendsten, da das Tempo im Voranschreiten wesentlich von der Chemie bestimmt wird. Man benötigt etwa ein halbes Jahr , um von einfachen Verbindungen bis zu Verbindungen mit Doppelbindungen und Ringen zu gelangen. Dies spielt sich im Chemieunterricht in der S II ab, während die wesentlichen graphentheoretischen Grundlagen bis etwa zur 6. Klasse (vgl. ROLLER et. al., 1971) im Mathematikunterricht besprochen werden. Es spricht allerdings der augenblickliche mathematische Kenntnisstand der Chemielehrer gegen eine alleinige Behandlung des Themas im Chemieunterricht. Von den Teilnehmern der Fortbildungstagung der GDCh in Dortmund hat kein Chemielehrer (außer einem, der auch Mathematik unterrichtet) etwas von Graphen gehört. Aber im Sinne kollegialer Nachbarschaftshilfe könnten Mathematiklehrer den Chemikern an der Schule beistehen.
Die Schule benötigt einen Computer, wenn computerorientiert gearbeitet werden soll. Die Anschaffung eines solchen Geräts ist um so aussichtsreicher, je mehr Lehrer aus den verschiedensten Fächern engagiert dafür eintreten. Das wird wohl nur der Fall sein, wenn an sinnvollen

Beispielen die Nützlichkeit des Computers für verschiedene Fächer demonstriert werden kann.
Schließlich ist es aus verschiedenen Gründen bedeutsam, daß Schüler am eigenen Leib verspüren, wie Mathematik in anderen Fächern angewandt wird.

a) Es gehört zu den Aufgaben des Chemieunterrichts, den Schüler mit fundamentalen Methoden der Chemie vertraut zu machen. Dazu gehört die mathematische Methode, wobei man sich nicht nur auf die Grundrechenarten und den Dreisatz beschränken soll.

b) Vielleicht bleibt durch Beispiele mit mathematikhaltiger Chemie in chemisch interessierten Schülern die Motivation erhalten, sich mit Mathematik zu beschäftigen.

c) Das Bild, das augenblicklich dem Schüler im Mathematikunterricht von der Mathematik vermittelt wird, ist strukturmathematisch überzeichnet. Um es ausgewogener zu gestalten, muß den Anwendungen zu ihrem Recht verholfen werden. Das kann zu einem beträchtlichen Teil nicht allein im Mathematikunterricht geschehen. Die Mitarbeit anderer Fächer ist notwendig.

d) Vielfach leiden Anwendungen in der Schule unter mangelndem "Ernstcharakter". Einmal dadurch, daß die Problemstellung wirklichkeitsfremd ist, zum anderen dadurch, daß der Schüler das Ergebnis seiner Rechnung nicht nutzt, weil das Problem nur in der Berufswelt auftritt. Die hier entwickelte Anwendung der Graphentheorie kann der Schüler im Berufsleben verwenden; er kann hier aber auch die Früchte seines mathematischen Tuns direkt im Chemieunterricht ernten.

5. Einführung in die Analysis an Auslaufvorgängen aus Wasserbehältern - ein Beispiel für die Modellierung naturwissenschaftlicher Phänomene im Mathematikunterricht

5.0 Vorbemerkung

In den Abschnitten 2 bis 5 wird ein einführender Kurs in die Analysis vorgestellt, der in besonderer Weise auf die engen Beziehungen zwischen Mathematik und Physik eingeht. Allgemeine Bemerkungen zu anwendungsorientiertem Mathematikunterricht bringen die Abschnitte 1 und 6.

5.1 Didaktischer Rahmen

Zunächst gehe ich auf zwei Forderungen an den Mathematikunterricht ein, die sich aus einer Betrachtung der Mathematik ergeben. Anschließend wird gezeigt, daß Auslaufvorgänge aus Wasserbehältern ein geeignetes Thema sind, um diese Forderungen zu erläutern.

5.1.1 Allgemeine Überlegungen

In jüngster Zeit erleben wir einen Boom von Veröffentlichungen zu anwendungsorientierem Mathematikunterricht. Es gibt hierfür eine Reihe von Gründen. Zwei möchte ich aufführen:
Erstens trägt der bisherige Unterricht der Sevicefunktion von Mathematik nicht genügend Rechnung. Man konnte so den Eindruck gewinnen, als treibe man Mathematik nur um ihrer selbst willen, und Mathematik sei eine Wissenschaft, die sich nur an innermathematischen Problemen orientiert. Dieser einseitige Eindruck von Mathematik sollte korrigiert werden, und durch ein ausgewogenes Bild von der Mathematik ersetzt werden. In anderen Worten - und damit ist ein zweiter Grund für die verstärkte Einbeziehung der Anwendungen aufgeführt - der Mathematikunterricht soll der Mathematik als Gesamtphänomen gerecht werden.
Zum ausgewogenen Bild der Mathematik gehört das Wechsel-

spiel von Reiner Mathematik und Angewandter Mathematik. Dahinter verbirgt sich eine Janusköpfigkeit. J. v. NEUMANN beschreibt die eine Blickrichtung so:"Das wesentliche Merkmal der Mathematik ist ihre ganz besondere Beziehung zu den Naturwissenschaften ... einige der besten Ideen der modernen Mathematik haben ihren Ursprung ganz eindeutig in den Naturwissenschaften." Für das fruchtbare Zusammenwirken von Mathematik und Naturwissenschaften gibt es seit alters her personifizierte Zeugen: ARCHIMEDES, NEWTON, EULER, NEUMANN, THOM.

Die andere Blickrichtung des Januskopfes weist auf den Teil der Mathematik, der sich unabhängig von Anregungen aus der Umwelt entwickelt hat. Die Geschichte hat gezeigt, daß Mathematiker die Mathematik über weite Strecken vorantreiben können, wenn sie sich nur an innermathematischen Problemen orientieren: EUKLID, Bourbakisten, HARDY. In diesem Sinne ist Mathematik autark. So wird den Schülern in westdeutschen Schulen überwiegend Mathematik dargestellt. Die erste Blickrichtung wird dem Schüler unterschlagen. Der Gesamtfortschritt der Mathematik wird aber erst durch inner- und außermathematische Anregungen getragen.

Es bleibt als Ziel, dem Schüler ein ausgewogenes Bild von der Mathematik zu vermitteln. Es ist für mich oberste Norm oder Grundauffassung eines Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen. Sie ist mit weithin anerkannten Normen der Mathematikdidaktik verträglich; etwa den allgemeinen Lernzielen von H. WINTER (1975)[1] oder dem genetischen Prinzip, dem E. WITTMANN (1976[4], S. 106-126) für den Mathematikunterricht eine besondere Ausprägung gab.

Fast unabhängig von einzelnen Disziplinen wird dieses erste Ziel aus einer Gesamtsicht der Mathematik gewonnen.

---

[1] Winter gibt vier allgemeine Lernziele an: Der Mathematikunterricht soll dem Schüler Möglichkeiten geben, schöpferisch tätig zu sein; rationale Argumente zu üben; die praktische Nutzbarkeit der Mathematik zu erfahren; formale Fertigkeiten zu erwerben.

Ein zweites Ziel des Mathematikunterrichts hebt auf die einzelnen Disziplinen ab: Ein Mathematikkurs soll sich an den fundamentalen Begriffen[1] der zugrundeliegenden mathematischen Disziplin orientieren. Für die Analysis könnte das heißen, daß die diskreten und kontinuierlichen Züge herausgearbeitet werden, daß etwa gleichermaßen auf Differenzengleichungen wie auf Differentialgleichungen eingegangen wird.
Diese aus beiden Zielen bestehende Leitlinie könnte meines Erachtens ein Instrument sein, mit der der Entwurf von Mathematikkursen in groben Zügen strukturiert werden kann. Das Anstreben von Ziel 1 strukturiert von Tätigkeiten und Arbeitsweisen[2] her, während Ziel 2 von den mathematischen Inhalten her strukturiert.

Wir werden uns im folgenden in erster Linie mit der Beziehung Mathematik-Naturwissenschaften beschäftigen. Jeder, der an einer Didaktik vom ausgewogenen Bild der Mathematik arbeitet, ist auf die Mithilfe der Naturwissenschaften und anderer Fächer angewiesen, denn:
erstens ist es auf die Dauer für den Schüler wenig überzeugend, wenn der Mathematiklehrer nur im Mathematikunterricht die Mathematik anwendet, während Naturwissenschaftler versuchen, die Mathematik zu umgehen. Es könnte sich bei dem Schüler der Eindruck festsetzen, daß die Anwendbarkeit der Mathematik ein vom Mathematiklehrer erfundenes Phänomen sei, das in den Naturwissenschaften keine große Bedeutung hat. Das wäre ein äußerst unerwünschter Effekt.
Zweitens muß man, wenn man eine derartige Didaktik über-

---

[1] Siehe hierzu Bruner (1960), Heitele (1975), Fischer (1976).

[2] In der Mathematikdidaktik wird die Janusköpfigkeit dadurch berücksichtigt, daß verschiedene Formen des Mathematisierens unterschieden werden (vgl. E. Wittmann (1976) und Abschnitt 6).

zeugend vertreten will, als Mathematikdidaktiker die Beziehungen der Mathematik zu den Naturwissenschaften kennen, studieren und ausbauen können.
Will man diese Forderung erfüllen, so bieten sich sicher an Hochschulen, an denen Mathematik und Naturwissenschaften in Fachbereichen zusammengeschlossen sind, ideale Möglichkeiten. Diese sind nicht nur zum Vorteil der Mathematik, sondern auch zum Vorteil der Naturwissenschaften.
Denn immerhin ist das Mathematisieren von Problemsituationen in allen Naturwissenschaften eine grundlegende Methode.
Man kann sagen, um mit dem Chemiker COULSON zu sprechen:

Mathematik und Naturwissenschaften sind Partner.

Dieser Ausspruch kann durchaus als Auftrag für einen Teil des didaktischen Arbeitens gesehen werden.
Man könnte nun kritisierend einwenden, daß die eben angedeuteten erkenntnistheoretischen und normativen Überlegungen sehr unverbindlich und allgemein sind. Sie haben m.E. aber auch ihre Bedeutung. Sie können helfen, einen einigermaßen festen, aber doch flexiblen Standpunkt zu beziehen, der davor schützt, von den Wogen der Modeströmungen hin- und hergerissen zu werden, die von Zeit zu Zeit über die Schule hinwegrauschen. Insbesondere könnte ein derartiger Standpunkt geeignet sein zu verhindern, daß auf den Pendelschlag eines beziehungsarmen Mathematikunterrichts, der sich am Bild einer autarken Mathematik orientiert, der Pendelschlag zu einem Mathematikunterricht folgt, der sich an einer Überfülle von realen Situationen orientiert und somit die Eigendynamik der Mathematik übersieht.

5.1.2 Beziehungshaltigkeit der Auslaufvorgänge

Auslaufvorgänge aus Wasserbehältern bilden eine Situation, die in verschiedenen Richtungen beziehungshaltig ist.
(a) Die Situation eignet sich für eine Propädeutik zur Analysis. Auf ganz natürliche Weise tritt die Frage nach

dem Funktionsverlauf der Wasserstände auf, wobei wichtige Begriffe wie Änderungsrate, Maximum, Schnitt mit einer Achse oder einer anderen Kurve, konvex usw. angesprochen werden.

(b) Im Zusammenhang mit der Mathematisierung der Situation werden wichtige Methoden der numerischen Analysis wie Diskretierung, Approximation, Rekursion und Extrapolation angesprochen.

Zur Beschreibung der Wasserstände werden Differenzengleichungen entwickelt. Ich möchte in diesem Zusammenhang für ein ausgedehntes Arbeiten mit Differenzen im Unterricht eintreten und dieses nicht nur auf die Stunden zur Einführung der Tangentensteigung und des Integrals beschränkt wissen. Dies aus drei Gründen:

1. Grund: Differenzen sind Bestandteil der Analysis.

2. Grund: Differenzen sind ein elementares Mittel und schaffen einen einfachen Zugang zu vielen Anwendungen. (Die Effektivität des Zugangs hängt jedoch vielfach vom Einsatz eines Computers ab).

3. Grund: Mit Differentialgleichungen können zwar eine Reihe von Problemen schneller gelöst werden, aber es gibt Differentialgleichungen, die nicht oder nur schwer in geschlossener Form gelöst werden können, so daß diese diskretisiert werden müssen, um sie einer numerischen Rechnung zugänglich zu machen. So muß man auf höherer Stufe auf Differenzengleichungen zurückgreifen.

(c) Die Arbeit des Schülers im Zusammenhang mit dieser Situation gestattet es, den naturwissenschaftlichen und mathematischen Erkenntnisvorgang zu beleuchten, sowie eine teilweise Kopplung zwischen beiden aufzuzeigen, wofür es ja aus der Geschichte genügend Beispiele gibt.

In diesem Zusammenhang können wir auch auf den Vorgang des Modellbildens eingehen.

Zusammengefaßt geht es mir bei diesem Kurs um die Darstellung zweier in der Schule vernachlässigter Punkte.

1. Die Beziehungen der Mathematik zur Umwelt und anderen

Fächern soll beleuchtet werden und
2. soll der diskrete Teil der Analysis angesprochen werden.
Auch wenn ich diese Punkte hier hervorhebe, so ist doch klar, daß andere gleichberechtigt daneben stehen.

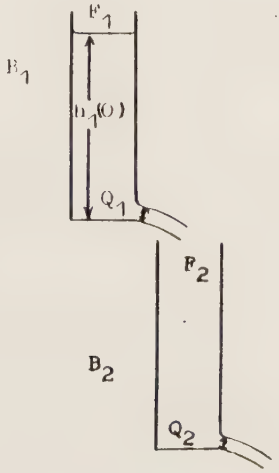


Abb. 1 Anordnung der Wasserbehälter B_1 und B_2

5.2 Das einführende Experiment

Zur Durchführung des Versuchs werden zwei Glasbehälter benötigt, deren seitlicher Ausfluß verschließbar ist. Die Behälter müssen so aufgestellt werden, daß der Inhalt des ersten Behälters B_1 über den zweiten Behälter B_2 abfliessen kann (Abb. 1). Der erste Behälter ist bei Versuchsbeginn bis zur Höhe $h_1(0)$ angefüllt. Dann wird der Ausfluß freigegeben. Der zweite Behälter ist bei Versuchsbeginn leer. Die Maße der Behälter 1 und 2 werden gleich gewählt.

Die Beschreibung des Auslaufvorgangs von B_1 mit Differentialgleichungen findet sich in physikalischen Arbeiten (z.B. SCHUBERT, 1969), sowie in mathematisch-didaktischen Veröffentlichungen von HUTH (1976) und SCHEY (1970). WINKELMANN (1975) kompliziert die Situation, indem er kein zylindrisches Gefäß nimmt, sondern den Auslaufvorgang aus einem Kaffeefilter betrachtet. Zur Beschreibung des Vorgangs schlägt er Differenzengleichungen vor.

5.3 Funktionsverlauf

Das Experiment fordert zu einer Reihe von Fragestellungen auf, die vom Schüler zu formulieren sind. Eine naheliegende ist: Wie verhält sich der Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit ?
Eine erste qualitative Beschreibung erfolgt aus der Beobachtung des Experiments: Im ersten Behälter fällt der Wasserspiegel monoton. Im zweiten Behälter steigt das Wasser bis zu einem Maximum und fällt dann, bis der zweite Behälter ausgelaufen ist. Der erste Behälter ist vor dem zweiten ausgelaufen.

Abb. 2 Schülerskizze zu Aufgabe 1

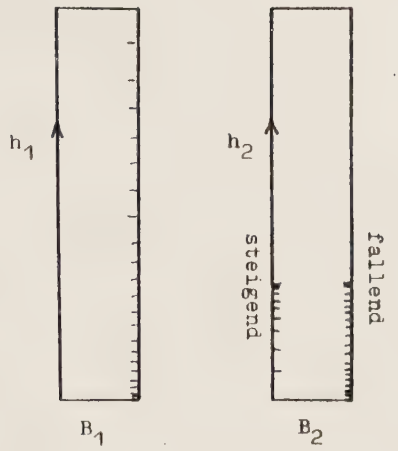


Abb. 3 Die Wasserstände werden nach konstanten Zeitspannen auf zwei Papierstreifen markiert

Aufgabe 1: Zeichne zwei Kurven, die die Wasserstände h_1, h_2 in Abhängigkeit von t darstellen (hier ist nur die Form der Kurve wichtig).

Die folgenden Anstrengungen zielen daraufhin ab, den skizzierten Kurvenverlauf zu präzisieren.

Eine quantitative Beschreibung des Versuchsablaufs erhält man, wenn an beide Behälter ein Papierstreifen geklebt wird und nach festen Zeitabständen Δt die Wasserstände markiert werden. So ergeben sich zwei Protokolle (Abb. 3).

Der Kurvenverlauf kann durch einige qualitative Überlegungen weiter präzisiert werden:

Schnitt der beiden Kurven, Maximum: Anschaulich ist klar, daß es einen Schnittpunkt der beiden Kurven gibt, denn anfangs gilt $h_2(0) < h_1(0)$. Solange Wasser in B_1 ist, ist

auch Wasser in B_2. Ist h_1 zum Zeitpunkt t_1 ausgelaufen, so kann B_2 frühestens zu diesem Zeitpunkt ausgelaufen sein, also $h_2(t_1) \geq h_1(t_1)$. Aus beiden Ungleichungen ergibt sich ein Schnittpunkt. (Stetigkeit muß nicht thematisiert werden, sie ist offensichtlich). Es gibt also einen Zeitpunkt

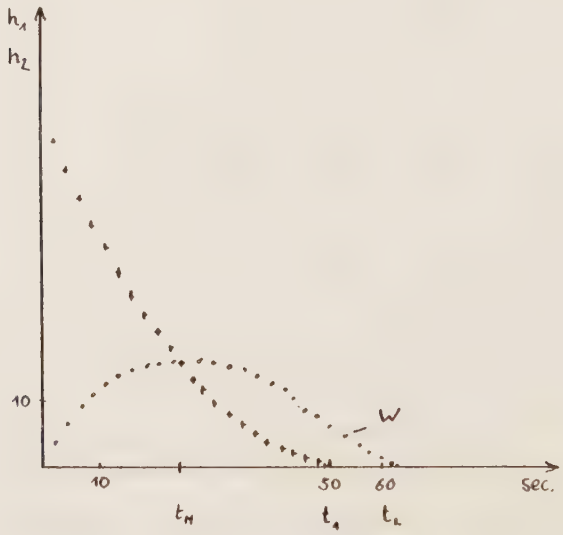


Abb. 4 Wasserstandskurven, die aus den Markierungen der Papierstreifen gewonnen werden.

t_M, so daß $h_1(t_M) = h_2(t_M)$. Hier halten sich der Zufluß und der Abfluß in B_2 die Waage. Später fließt weniger zu, aber auch mindestens so viel ab wie zu, so daß h_2 zum Zeitpunkt t_M sein Maximum hat.
Es ist $h_2(t_M) < 0{,}5\ h_1(0)$. Denn wenn $h_1(t) = 0{,}5\ h_1(0)$, so ist die Hälfte der Wassermenge von B_1 nach B_2 geflossen. Da aber B_2 gleichzeitig auch ausfließt, ist in B_2 nicht mehr die halbe Wassermenge vorhanden.

Änderungsrate, konkav, konvex, Maximum: Ist B_1 zum Zeitpunkt t_1 ausgeflossen, so vollzieht sich in B_2 ab diesem Zeitpunkt ein reiner Auslaufvorgang, der mit dem von B_1 zwischen den Zeitpunkten $t_1 - (t_2-t_1)$ und t_1 übereinstimmt. Somit ist h_2 im Intervall t_1, t_2 konkav, da h_1 konkav. Dies geht aus dem Verhalten der Änderungsrate hervor: Es ist klar, daß hohe Wassersäulen wegen des größeren Auspreßdruckes in einer Zeitspanne Δt mehr Wasser zur Ausflußöffnung hinauspressen, als niedrige Wassersäulen. Die Änderungsrate der Wasserhöhe steigt hier von stark negativem Wert bis auf Null an, d.h. der Wasserspiegel sinkt immer langsamer.
Kann nun der Verlauf der h_2-Kurve zwischen O und t_1 auch mit den Begriffen konvex und konkav beschrieben werden, oder verläuft h_2 in der Nähe von W - wie man nach der Zeichnung vermuten könnte - geradlinig, was eine konstante Änderungsrate bedeuten würde? Zwischen O und t_M ist die h_2-Kurve konvex, denn anfangs fließt viel Wasser in B_2 ein, aber wenig ab (wegen der geringen Wasserhöhen). Das gibt eine starke Höhenzunahme. Dann fließt weniger zu, aber etwas mehr ab als anfangs, bis in t_M gleichviel zu- wie abfließt. Insgesamt sinkt die Änderungsrate von einem anfangs positiven Wert bis auf Null. Aber auch zwischen t_M und t_1 sinkt die Änderungsrate, denn in t_M ist sie Null, während sie bis t_1 negativ geworden sein muß, denn zum Zeitpunkt t_1 fließt nichts mehr nach B_2 zu, aber eine Wassersäule der Höhe $h_2(t_1)$ drückt das Wasser aus B_2.
W ist also ein Punkt, in dem eine Rechtskurve in eine Linkskurve schwenkt (oder springt) und M ist ein Punkt, wo die h_2-Kurve einen Höchststand erreicht. Zusammenfassend soll festgehalten werden, daß intuitiv wesentliche Begriffe der Analysis angesprochen werden. Es sollen noch einige Aufgaben aufgeführt werden, die geeignet sind, weitere Erfahrungen zu dem Begriff Änderungsrate zu sammeln.

Aufgabe 2: Zeichne in ein Achsenkreuz die eben diskutierte Entwicklung der Änderungsrate und versuche, Beziehungen zur experimentell gefundenen Wasserstandskurve herzustellen.

Aufgabe 3: Zeichne in ein Achsenkreuz eine mögliche Kurve für die Änderungsrate, die sich folgendermaßen verhält:

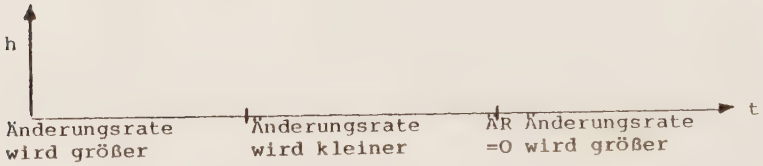


Abb. 5 zeigt mögliche Kurven für die Änderungsrate und den Höhenverlauf. Die nun folgende Aufgabe 4 hat für den weiteren Verlauf des Kurses eine Schlüsselstellung, da der augenscheinlich kontinuierliche Auslaufvorgang diskretisiert wird. (Schüler haben an dieser Stelle ein 'ungutes' Gefühl. "Wird der Fehler, den ich mache, nicht zu groß?")

Aufgabe 4: Entwickle aus der experimentell gefundenen Wasserstandskurve für B_1 die Wasserstandskurve für B_2 zeichnerisch. Anleitung: Betrachte nach Zeitspannen Δt die Wasserstandsabnahme von B_1 und zerlege den gleichzeitigen Zulauf und Ablauf in B_2 in ein Hintereinander von Zulauf und anschließendem Ablauf aus B_2.

5.4 Diskretisieren

Mit einigem Aufwand konnten wir in Abschnitt 3 die Wasserstandkurven für einen bestimmten Fall bestimmen. Auch wenn wir Aufgabe 4 betrachten, kommen wir um eine experimentelle Wasserstandsbestimmung für B_1 nicht herum. Wir wollen jedoch jetzt ein mathematisches Modell entwickeln, an dem wir weiter experimentieren können, indem die verschiedenen Parameter variiert werden. Hat sich ein derartiges Modell an Klassenzimmer- oder Laborversuchen bewährt, so kann man

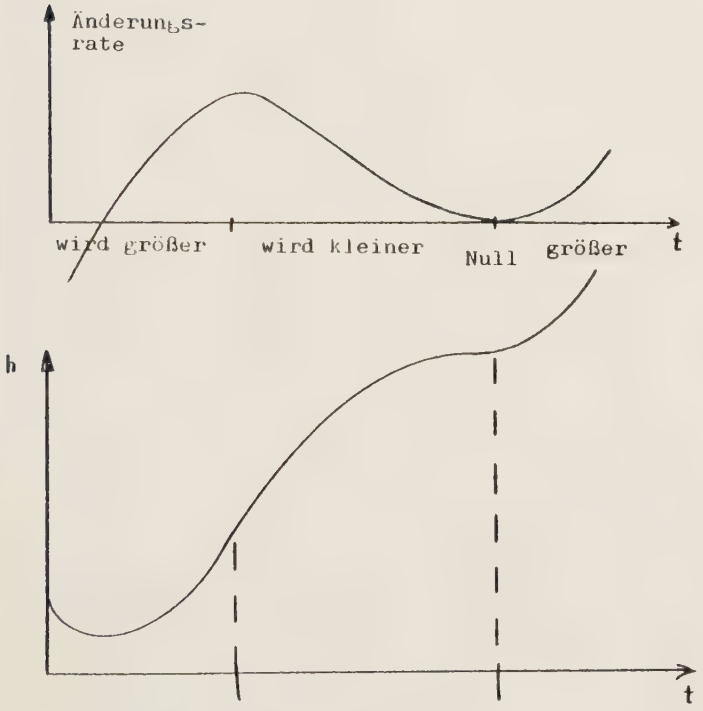


Abb. 5 Beispiel zu Aufgabe 3

die Hoffnung haben, daß es bei der Planung größerer technischer Vorhaben gute Dienste leistet (siehe die Aufgaben 6 und 10). Die verschiedenen Versuchssituationen und der Verlauf der Wasserstandkurven ist abhängig von folgenden Parametern für den ersten und zweiten Behälter:

- Querschnitt der Behälter: F_1 und F_2
- Querschnitt der Ausflußöffnungen: Q_1 und Q_2
- Die anfänglichen Wasserstände in den Behältern: $h_1(0)$ und $h_2(0)$.

Bei der Entwicklung eines mathematischen Modells für diese Auslaufvorgänge halten wir uns eng an die in der Aufgabe 4 vorgegebene zeichnerische Methode. Wir werden sie im wesentlichen nur noch analytisch darstellen. Bei der Entwicklung des Modells übernehmen wir aus der zeichnerischen Wasserstandsbestimmung die Diskretisierung des Vorgangs. Beschränken wir uns vorläufig auf den 1. Behälter:

5.4.1 Der erste Behälter

In der Zeitspanne Δt verläßt die Masse Δm das Gefäß. Somit verringert sich die potentielle Energie der Flüssigkeit in dem Behälter um etwa $\Delta m g h_1$. Diese Energie wird beim Auslaufen der Flüssigkeit in kinetische Energie umgesetzt.

$$(1) \qquad \Delta m g h_1 = \frac{1}{2} \Delta m u^2$$

Für die Austrittgeschwindigkeit u des Wassers ergibt sich hieraus

$$(2) \qquad u = \sqrt{2gh_1}$$

Das austretende Volumen ΔV ist dann pro Zeiteinheit

$$\Delta V = u \cdot Q_1 \Delta t$$

oder auch

$$\Delta V = \Delta h_1 F_1$$

Für die Höhenänderung erhalten wir dann in der Zeiteinheit:

$$(3) \qquad \Delta h_1 = \frac{Q_1 \sqrt{2g}}{F_1} \sqrt{h_1}\, \Delta t \,.$$

Wir können nun nach jeder neuen Zeiteinheit den Wasserstand iterativ berechnen.

$$(4) \qquad h_1(t + \Delta t) = h_1(t) - \Delta h_1(t),$$

wobei $t = n \cdot \Delta t$ ist und $n \in N_0$ die Anzahl der verstrichenen Zeiteinheiten angibt, und $h_1(0)$ fest vorgegeben ist. Die iterative Art mit (4) zu arbeiten und der mit der Aus-

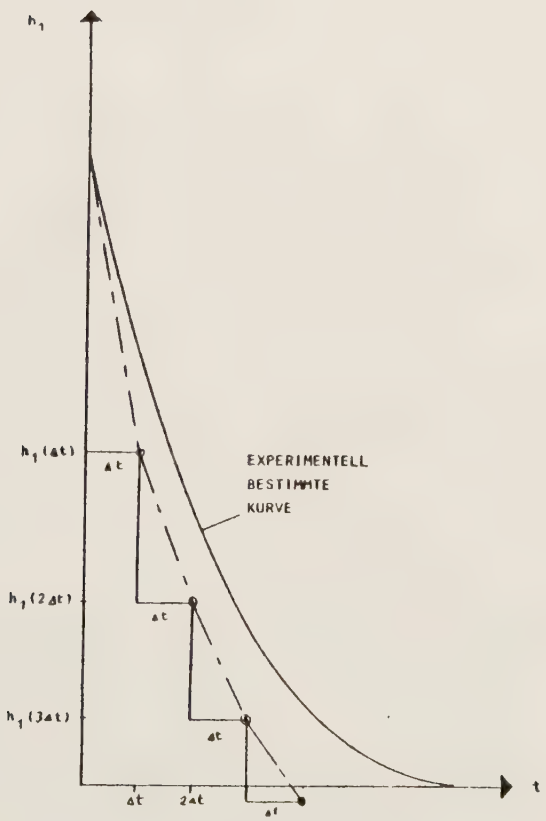


Abb. 6 Vergleich der experimentell gefundenen Kurve mit einer von Hand gerechneten Iteration.

wertung verbundene Rechenaufwand legt eine Computersimulation[1] des Auslaufvorganges nahe.
Bevor ein Computer bemüht wird, sollte der Schüler einige Rekursionsschritte von Hand (oder mit dem Taschenrechner) durchgerechnet haben und seine Ergebnisse in eine Zeichnung (Abb. 6) übertragen, damit der Vorgang besser durchschaut wird.
Auf dem Computer wird die Iteration mit kleinerem Δt durchgerechnet. Ein Vergleich zwischen Computerzeichnung und den experimentellen Daten zeigt, daß bei der Computersimulation ein zu früh ausgelaufener Behälter angezeigt wird. Diese Beobachtung soll ergründet werden. Dabei stößt man auf einige für die numerische Analyse typischen Methoden. Der im Experiment augenscheinlich kontinuierliche Vorgang wird im Modell diskretisiert. Durch das Diskretisieren werden Fehler erzeugt, denn ausgehend vom Punkt $(0, h_1(0))$ wird ein Kantenzug konstruiert, der den Höhenverlauf approximiert. Dieses Vorgehen ist an dem Behälter so zu interpretieren, daß während der Zeitspanne Δt das Wasser unter gleichem Druck ausgepreßt wird. In Wirklichkeit nimmt der Druck wegen der Abnahme der Wasserhöhe in B_1 auch ab.
Man arbeitet also in dem mathematischen Modell (4) mit zu großen Auspreßhöhen, was ein vorzeitiges Auslaufen in der Simulation ergibt. Daß (4) eine Approximation liefert, wird beim Vergleich verschiedener Simulationen deutlich, bei denen für Δt verschiedene Werte gewählt werden. Auch an der

---

[1] In diesem Zusammenhang sind Computer mit graphischen Möglichkeiten besonders geeignet. Eine Zeichnung sagt oft mehr aus und erlaubt einen schnelleren Überblick als eine Zahlentabelle. Hier wurde der Tischrechner TEK 4051 verwendet, in dem eine elegant programmierte Bildröhre integriert ist. Der Computer arbeitet mit einem um graphische Befehle erweiterten BASIC.

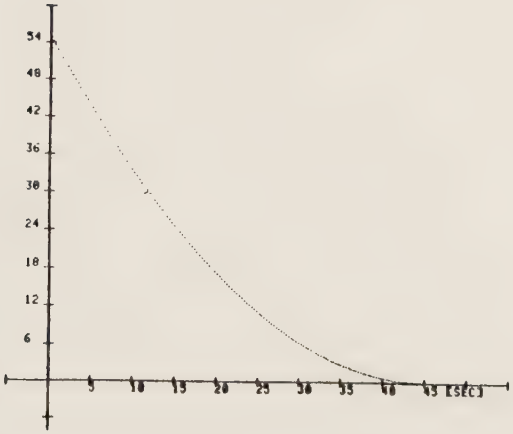


Abb. 7 Computersimulation des Auslaufvorgangs aus B_1

Stelle tritt die Approximation hervor, wo in der Computerrechnung für B_1 die Fehlermeldung 'negativer Radikand' die Rechnung abbricht. Dies kann sich nur auf $\sqrt{h_1}$ beziehen. h_1 muß irgendwann in der Rechnung negativ werden, da es ein Zeitintervall gibt, in dem der Wasserstand so niedrig ist, daß wegen des zu großen verwendeten Auspreßdruckes in Δt mehr Wasser hinausgedrückt werden könnte, als vorhanden ist. Dann ist also die Höhenänderungsrate größer als die Wasserhöhe.

Hier noch einige Aufgaben zu dem Auslaufvorgang aus einem Behälter:

Aufgabe 5: Wie groß muß Δt mindestens gewählt werden, damit bereits nach dem ersten Rekursionsschritt der Behälter leer

ist? Wie stellt sich dann die Auslaufkurve dar?
Aufgabe 2': Greife nochmals Aufgabe 2 auf und lasse von dem Computer eine Tabelle mit den Höhenänderungen ausdrukken.
Aufgabe 6: Anwendungen außerhalb des Schulzimmers: Sprengwagen, Schleuse, Schwimmbecken.
A) Eine Schiffsschleuse wird vom Oberwasser her durch die Schützen gefüllt. (Daten der Ahsener Schleuse: 74,5 m lang, 12 m breit, 7,6 m tief. Das Oberwasser steht 3,6 m über dem Unterwasser. Die Schützen sind 16 cm hoch.)
Man beachte: Bei Anwendungen im täglichen Leben sind die Ausflußöffnungen meist nicht glatt ausgezogen, sondern eckig. Das ausströmende Wasser 'nutzt' dann nicht den ganzen Querschnitt Q, sondern nur A · Q, wobei A etwa zwischen 0,8 und 0,6 liegt. Begründung: Das Wasser strömt von allen Seiten auf die Ausflußöffnung zu und kann am Rande nicht plötzlich auf die Strahlachse umbiegen. So erfolgt eine Einschnürung des Strahls (siehe L.BERGMANN - Ch.SCHAEFER (1965)).
B) Ein Schwimmbecken der Größe 20 x 50 m mit 2 m Wassertiefe soll über Nacht (8 Stunden) entleert werden können.

5.4.2 Der zweite Behälter

Ein zweiter Behälter sollte aus verschiedenen Gründen in die Betrachtung einbezogen werden.
- Weitere Anwendungen werden erschlossen. Insbesondere können Analogien zu Vorgängen in Biologie und Chemie hergestellt werden.
- Die Bedeutung des elementaren Mittels der Differenzengleichung wird betont.
- Auf höherer Stufe (Leistungskurs) werden Grenzen des Differentialgleichungskalküls gezeigt. Bei Differentialgleichungen, die nicht in geschlossener Form gelöst werden können, greift man auf Differenzengleichungen zurück.
- Die Problematik der Güte einer Approximation mittels Differenzen kann erläutert werden.

Die Situation im zweiten Behälter unterscheidet sich von der im ersten Behälter dadurch, daß gleichzeitig Wasser zu- und abfließt. Im mathematischen Modell werden wir die Gleichzeitigkeit dadurch aufheben, daß der Vorgang in ein Ablaufen und anschließendes Zulaufen zerlegt wird (vgl. Aufgabe 4). Betrachten wir nun die Entwicklung des Wasserstandes im zweiten Behälter: Entsprechend (3) gilt in B_2 für die Höhenabnahme Δh_2 pro Zeitspanne Δt

$$(5) \qquad \Delta h_2^- (t) = -\frac{Q_2 \sqrt{2g}}{F_2} \sqrt{h_2(t)}\, \Delta t.$$

Aus B_1 fließt das Volumen

$$\Delta V_1(t) = \sqrt{2gh_1(t)}\, Q_1 \Delta t$$

zu und würde eine Höhenzunahme erzeugen von

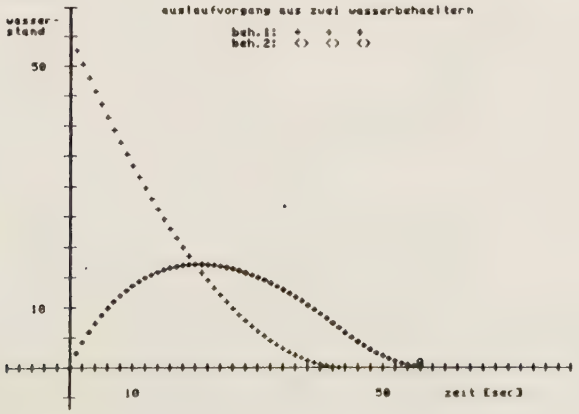


Abb. 8 Computersimulation zu dem Experiment von Abbildung 1.

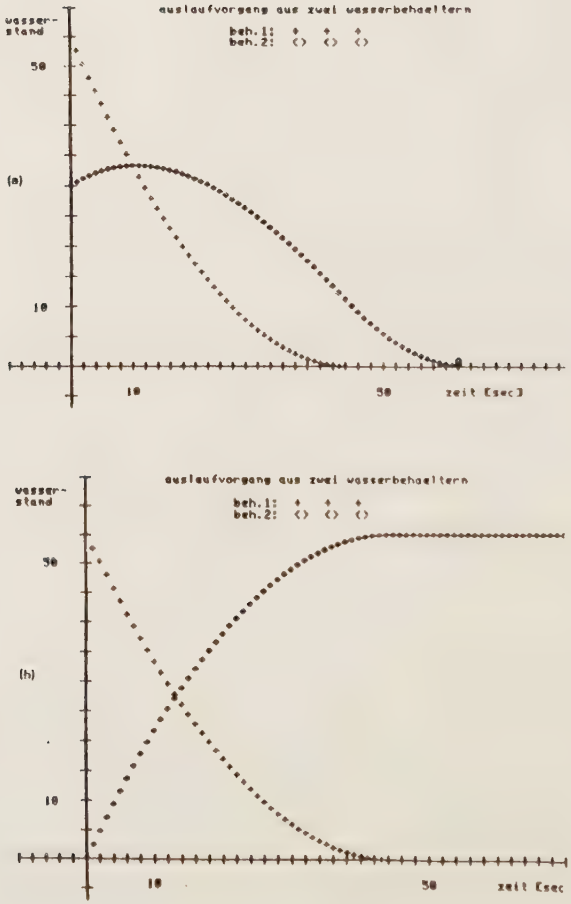


Abb. 9 Veränderte Bedingungen in Behälter 2: (a)$h_2(0) = 30$; (b)$Q_2 = 0$

$$(6) \quad \Delta h_2^+(t) = \frac{\Delta V_1}{F_2} = \frac{Q_1 \sqrt{2g}}{F_2} \sqrt{h_1(t)}\Delta t.$$

Der Wasserstand $h_2(t + \Delta t)$ errechnet sich dann aus $h_2(t)$ und $h_1(t)$ iterativ:

$$(7) \quad h_2(t + \Delta t) = h_2(t) + \Delta h_2^-(t) + \Delta h_2^+(t)$$

mit $t = n \cdot \Delta t$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$

(7) wird durch die Iteration $h_2(t + \Delta t) = h_2(t) + \Delta h_2^-(t)$ ersetzt, wenn B_1 ausgelaufen ist. (Reiner Auslaufvorgang in B_2!) Die Anfangsbedingung für h_2 ist in unserem Versuch $h_2(0) = 0$. Abb. 8 zeigt eine Computersimulation auf der Grundlage von (7).

Der Computerausdruck zeigt, daß die Überlegungen aus Abschnitt 3 gut zu dem Ergebnis der Computerrechnung passen. Das Programm sollte so allgemein gestaltet sein, daß alle Konstanten variierbar sind, damit der Schüler einige Fälle am Computer durchspielen kann.

In Abb. 9a-b werden die Bedingungen für B_2 geändert. Z.B.

Aufgabe 7: Die Auslauföffnung von B_2 ist geschlossen und $h_2(0) = 0$. Stelle den Wasserstand in B_2 in Abhängigkeit von h_1 dar ($h_2 = h_0 - h_1$). Bestimme den Schnittpunkt der Wasserstandskurven. Stelle h_2 in Abhängigkeit der Höhenänderung von h_1 dar:

$$h_2((n + 1)\Delta t) = \sum_{i=1}^{n} - \Delta h_1(i \cdot \Delta t)$$

Einige programmiertechnische Kleinigkeiten müssen beachtet werden: Damit die Computerrechnung nicht vorzeitig abbricht, bevor alle Behälter ausgelaufen sind, muß wegen der Möglichkeit eines negativen Radikands der Wasserstand auf den Wert Null gesetzt werden, falls er unter Null sinkt. Steht für die Ausgabe der Zeichnung nur eine Schreibmaschine zur Verfügung, so wird die Programmierung wesentlich erschwert. Da der Schreibmaschinenkopf in einer Zeile nicht zurück-

springen kann, müssen die einzelnen Wasserstandshöhen zum Zeitpunkt t der Größe nach sortiert werden. Dies entfällt, wenn Plotter-ähnliche Geräte zur Verfügung stehen, wie hier der graphische Bildschirm des Tischrechners TEK 4051.

5.4.3 Differentialgleichungen

Die zu der Differenzengleichung (3) gehörende Differentialgleichung

$$(8) \qquad \frac{dh_1}{\sqrt{h_1(t)}} = - c_1 dt$$

mit $c_1 = Q_1 \cdot \sqrt{2g}/F_1$ kann nicht in der einführenden Einheit bearbeitet werden, sondern bleibt späteren Stunden vorbehalten. Ihre Lösung ist unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $h_1(0) = h_o$:

$$(9) \qquad \sqrt{h_1(t)} = - \frac{c_1}{2} t + \sqrt{h_o} \; ; \quad 0 \leq t \leq \frac{2\sqrt{h_o}}{c_1} = t_1$$

oder

$$(10) \qquad h_1(t) = \left(- \frac{c_1}{2} t + \sqrt{h_o} \right)^2 .$$

Für $t > t_1$ ist $h_1(t) = 0$.
Die Lösung (10) demonstriert (im Zusammenhang mit Aufgabe 8) augenfällig die 'Macht des Kalküls' (R.FISCHER, 1976) der Differentialgleichungsrechnung.

Aufgabe 8: Bestimme den Zeitpunkt, zu dem der Behälter leer ist! Wie lange braucht es, bis der Behälter halb leer ist? Berechne den Schnittpunkt der Kurven aus Aufgabe 7.
Die zum Auslaufvorgang von B_2 gehörende DGL erhalten wir aus der Höhenänderung

$$\Delta h_2(t) = \Delta h_2^+(t) + \Delta h_2^-(t).$$

Durch Einsetzen von (3), (5) und (6) erhält man

$$\frac{dh_2}{dt} = \frac{Q_1 \sqrt{2g}}{F_2} \cdot \left(\frac{Q_1 \sqrt{2g}}{2F_1} t + \sqrt{h_o} \right) - \frac{Q_2 \sqrt{2g}}{F_2} \sqrt{h_2(t)} .$$

$$(11) \qquad \frac{dh_2}{dt} = -\alpha t + \beta - \gamma\sqrt{h_2(t)};\ 0 \leq t \leq t_1 ,$$

wobei $\alpha = \dfrac{Q_1^2\, g}{F_1 F_2}$, $\beta = \dfrac{Q_1\sqrt{2gh_o}}{F_2}$, $\gamma = \dfrac{Q_2\sqrt{2g}}{F_2}$.

Für $t_1 \leq t \leq t_2$ ist $\dfrac{dh_2}{dt} = -\gamma\sqrt{h_2(t)}$.

Die Differentialgleichung für B_1 konnte ohne große Schwierigkeiten durch Trennung der Variablen gelöst werden. Das geht bei (11) nicht mehr, so daß eine Lösung in der Schule nicht infrage kommt. Vielmehr muß man sich auf die näherungsweise Lösung mittels der Differenzengleichung beschränken.

5. Variation der Versuchssituation und weitere Anwendungen

Der anfangs geschilderte Klassenzimmerversuch kann in mancherlei Weise variiert werden. Mit den Differenzengleichungen wird ein schlagkräftiges Beschreibungsmittel bereitgestellt, das nicht nur auf die verschiedensten Auslaufvorgänge, sondern auch auf andere Situationen angewendet werden kann. Insbesondere sollte versucht werden, nach echten Anwendungen und Daten aus der Praxis zu suchen.

Aufgabe 9 : In ein anfangs leer (fast volles) Gefäß mit offener Ausflußöffnung fließt ein konstanter Wasserstrom zu. (Ergebnis: Der Wasserstand nähert sich einer konstanten Höhe von unten (oben) her.)

Aufgabe 10: Drei Behälter sind hintereinandergeschaltet.
(a) Der Zulauf zum oberen Behälter wird gesperrt und die Abflußöffnungen geöffnet. (Anwendung: Auslaufvorgang bei Fischteichen zum Abfischen).
(b) Welche Wasserstände ergeben sich bei konstantem Zufluß, und den Anfangsbedingungen $h_1(0) = h_o$, $h_2(0) = h_2$ und $h_3(0) = h_3$?

(c) Nach einer längeren Zeitspanne erfolgt ein verstärkter Zufluß, der dann wieder abklingt (Hochwasser). Wie entwikkeln sich die Wasserstände ?
Die Simulation dieser Situation veranschaulicht die Funktionsweise einer Kette von Rückhaltebecken bei Hochwassergefahr. Das Hochwasser wird mit immer geringeren Amplituden an das nächste Becken abgegeben. Es tritt eine Glättung ein (wenn das Hochwasser nicht zu lange anhält).
Aufgabe 11: Wachstumskurven, Räuber-Beute-Verhalten.
Weitere physikalische "Auslaufvorgänge": Kondensator, Wärmeausgleich. Entwicklung der Konzentration von Substanzen bei chemischen Reaktionen.

5.6. Die Rolle der realen Situation in dieser Unterrichtseinheit

5.6.1 Komplexität des Einführungsbeispiels

In den vergangenen Jahren gab es eine ganze Reihe von Veröffentlichungen zur Analysis, in denen auf Anwendungen eingegangen wird. Grob gesprochen kann man zwei Positionen beobachten, die den Anwendungen im Unterricht zugewiesen werden:
So bevorzugt z.B. BLUM (1975) die Anwendung eines bereits (innermathematisch) entwickelten Kalküls, während z.B. SCHEY (1970) in seinem Aufsatz 'A Laboratory, Computer and Calculus Based Course in Mathematics' die reale Situation zum Ausgangspunkt mathematischer Betrachtungen wählt. Letzterem Vorgehen habe ich mich hier angeschlossen, und zwar ausdrücklich an der Stelle, wo es um eine Einführung in die Analysis geht. Denn in ganz natürlicher Weise trat zu der hier bearbeiteten Situation die Frage nach dem Funktionsverlauf der Wasserstände auf, so daß Begriffe wie konvex, Maximum, Schnitt mit t-Achse usw. angesprochen wurden. Jedoch war die erste Art von Anwendung genauso vertreten. Unser Vorgehen sei nochmals in Abb. 10 zusammengestellt.

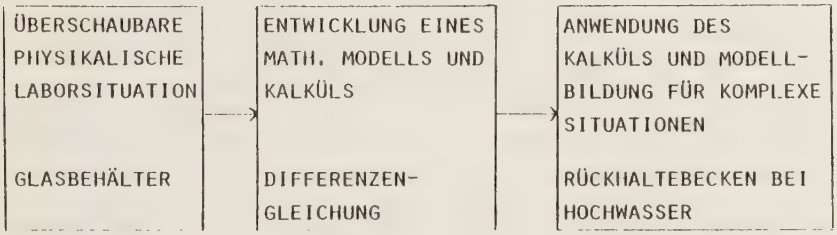


Abb. 10: Schematische Darstellung vom Verlauf des Kurses

Man könnte nun zu dem hier geschilderten Vorgehen mit Blum einwenden: "Es ist allerdings wohl nicht zweckmäßig, sofort mit einem Anwendungsproblem in die Differentialrechnung einzusteigen, um nicht Schwierigkeiten zu häufen." Dieses Problem der Komplexität wird in der Didaktik schon von OEHL (1962, S. 155) diskutiert. Oehl sieht Sinn und Zweck des Einführungsbeispiels so: "An einer konkreten Situation, die vom Kinde durch eigenes Tun gestaltet wird, erlebt es die Zweckmäßigkeit" der Mathematik, und was hier besonders wichtig ist: In dem Experiment ist ein Teil der Ideen der Analysis und numerischen Mathematik 'vorgebildet'. Nachfolgende Stunden greifen die Ideen auf und "lösen sie in ihre Schwierigkeitsstufen auf".
Die einführende Situation sollte jedoch nicht zu komplex sein. Das würde wohl an den Großteil der Schüler zu hohe Anforderungen stellen. Die Mathematisierung komplexer Situationen will erst erlernt sein und ist besonders schwierig, wenn ein adäquates Kalkül nicht vorhanden ist. Das mathematisch Wesentliche könnte durch eine zu große Situationsfixierung des Schülers nicht deutlich genug erkannt werden. Jedoch müssen Einführungsbeispiele im allgemeinen einen gewissen Komplexitätsgrad haben, um genügend beziehungshaltig zu sein. Es ist also vielfach ein mittlerer Komplexitätsgrad angezeigt. Das dürfte bei unserem Einführungsbeispiel der Fall gewesen sein:
Die Beziehungshaltigkeit haben wir nachgewiesen. Die Situation war überschaubar, da die Schüler den Versuch selber ohne Schwierigkeiten ausführen können. Die Parameter, die die Situation beeinflussen, werden schnell erkannt. Die notwendigen physikalischen Gesetze werden auf dieser Klassenstufe besprochen.
Ich möchte noch eine Bemerkung machen zum Einstieg in die Analysis mit dem Tangentenproblem:
Es wird daran zu Recht der schnelle Weg zum Differenzieren betont. Aber es besteht vielleicht die Gefahr, daß das Ableiten zu schnell mechanisiert wird; der Schüler sieht

nicht mehr, was dahintersteckt (etwa vergleichbar der graphischen Löschung eines linearen Optimierungsproblems mit zwei Variablen). Vielmehr scheint hier eine 'Verlängerung' (DÉAK, 1976) des Zugangs erwünscht, indem mit Differenzen gerechnet wird und sich der Approximationsgedanke beim Schüler festsetzt. Besonders wichtig ist mir hier, daß Differenzen als elementares und vielfach adäquates Arbeitsmittel erkannt werden und somit ihren eigenen Wert besitzen. Das Tangentenproblem soll ein Problem unter mehreren sein, bei dem Differenzen eingesetzt werden.

5.6.2 Prozeß der Mathematisierung

Es bleibt noch zu erläutern, in welcher Weise der in der Einleitung erwähnte Prozeß der Mathematisierung oder des Erkenntnisgewinns angesprochen wird. Es gehört zu den wichtigen Anliegen dieser Einheit, daß der Schüler durch die Einbeziehung physikalischer Versuche in den Mathematikunterricht implizit erfährt, daß zwischen Mathematik und Physik intensive wechselseitige Beziehungen bestehen. Allgemeiner noch: Der Schüler erfährt (unter Beachtung weiterer Anwendungen), daß Mathematik nicht beziehungslos im Kanon der Schulfächer steht, sondern mit diesen ein Geflecht bildet. (Das zu verdeutlichen ist natürlich nicht nur die Aufgabe dieser Einheit, sondern durchgehendes Anliegen des gesamten Unterrichts).
Man sollte diese Beziehungen und speziell die Genese von Mathematik auch mit Schülern explizit besprechen.
Einen guten Leitfaden dafür bilden die von E. WITTMANN (1974, S. 107-109) aufgeführten drei Standpunkte der Mathematisierung

1. Standpunkt: Schaffung und Weiterentwicklung mathematischer Instrumente;
2. Standpunkt: Begrifflich strukturelle Analyse - Schematisierung ("Abstraktion durch Rückschau");
3. Standpunkt: Anwendung.

Es soll die von E. WITTMANN vorgenommene allgemeine Be - schreibung dieser Standpunkte nur an die hier speziell bearbeitete Einheit angepaßt werden:
Der erste Standpunkt wird in Abschnitt 2 anfangs eingenommen. Den Ausgangspunkt bildet ein physikalisches Experiment. In dieser neuen Situation entdeckt der Schüler eine Fragestellung, die nach der Wasserstandentwicklung. Die Lösung der hier in erster Linie qualitativen Fragen beruht auf der Entwicklung des Argumentationsmittels Differenzenquotient, der hier 'Höhenänderungsrate' heißt.
Die Argumentation mit diesem Werkzeug erfolgt in der Situationssprache, z.B.: "Anfangs fließt mehr Wasser aus B_1 ab als später, so daß die h_1-Kurve anfangs abfällt und dann flacher wird".
Einige Begriffe zur Beschreibung des Kurvenverlaufs werden gebildet: "Wasserhöchststand in B_2" (absolutes Maximum), "Punkt, in dem die Höhenänderungsrate von abnehmend auf zunehmend umspringt" (Punkt, in dem Rechtswendigkeit in Linkswendigkeit übergeht. Eventuell Wendepunkt) usw.
Ansätze zur Einnahme des zweiten Standpunktes werden durch die Bearbeitung der Aufgaben ausgelöst. Es geht dort darum, daß man das Arbeitsmittel 'Änderungsrate' genauer untersucht, ohne dabei immer an den Kontext mit den Wasserständen denken zu müssen. Es werden Zusammenhänge zwischen dem Kurvenverlauf und Änderungsrate hergestellt. Eine tiefergehende begrifflich-strukturelle Analyse der Änderungsrate erfolgt erst in späteren Stunden und ist wohl das Hauptthema eines Analysiskurses. Daran wird sich dann in vielfältiger Weise die Anwendung des entwickelten Kalküls der Differentialrechnung anschließen. Die Phase der nachfolgenden Anwendung in verschiedenen Situationen ist wichtig, um den Ökonomieeffekt zu verdeutlichen, der bei der Einnahme des zweiten Standpunktes erreicht wurde.
Der Standpunkt 1 wird im Zusammenhang mit dem Auslaufvorgang nochmals zu einem wesentlich späteren Zeitpunkt eingenommen, wenn die Frage nach der nichtiterativen Berech-

nung des Auslaufzeitpunktes von B_1 die Lösung der Differentialgleichung (8) nahelegt.
Kehren wir zum Abschnitt 4 zurück, wo ein mathematisches Modell zur quantitativen Berechnung der Wasserstandskurven erstellt wurde. Wesentliche Vorarbeit zu dem Modell wurde in Aufgabe 4 geleistet, wo h_2 aus h_1 entwickelt wurde. Unter Einbeziehung physikalischer Gesetze konnte h_1 dann quantitativ erfaßt werden. Das entwickelte Werkzeug ist eine Differenzengleichung.. Diese Aktivität, die dem Standpunkt 1 zuzuordnen ist, wird unter Überspringen von Standpunkt 2 im fünften Abschnitt direkt übergeleitet in den 3. Standpunkt, wo Differenzengleichungen zur Lösung verwandter oder fremder Probleme eingesetzt werden:
Das Grundmuster des Modellbildens besteht darin, daß man zwischen zwei Ebenen pendelt. Hier ist es die Sachebene der Behältersituation, zu der auch eine sachbezogene Sprache gehört, sowie die Mathematische Ebene mit ihrer speziellen Sprache. Der Modellbildungsvorgang wird meist als mehrschrittiger Vorgang beschrieben. Der wichtigste und interessanteste Schritt ist der Übergang von der einen zur anderen Ebene. Er wird dadurch eingeleitet, daß man der Situation in offensiver Weise gegenübertritt und 'den Dingen unserer Welt die mathematischen Formen aufprägt' (FREY, 1967, S. 149), und sich nicht unbedingt von 'etwaigen oder vermeintlichen Eigengesetzmäßigkeiten' der Situation leiten läßt (D.W. MÜLLER, 1973). In unserem Fall ist die mathematische Form (Modell) eine Differenzengleichung, mit der man die augenscheinliche Kontinuität des Vorgangs ignoriert und so zerhackt, als ob man es mit einem portionsweisen Ausschütten zu tun hätte. Natürlich ist dieses Aufprägen nicht willkürlich. Ihm geht meist eine eingehende Beobachtung der Situation voraus. Ein mathematisches Modell wird erst akzeptiert, wenn es mit den interessierenden Beobachtungen korrespondierende Ergebnisse liefert. In unserem Fall können wir übrigens durch Verkleinerung von Δt so auf das Modell einwirken, daß es einen für das Auge kontinuierlichen Vorgang vortäuschen würde, so daß

hier eine Versöhnung zwischen Sinneneindruck und mathematischem Modell erfolgt.

L I T E R A T U R

ABBATT, F.R./HARTLEY, J.R.: "Teaching Planning Skills by Computers", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 5 (1974), 665-671

AHRENS, I.: "Platon und die Mathematik", in: Der Mathematikunterricht, Heft 4 (1971), 5-12

APOSTEL, L.: "Towards the formal study of models in the non-formal sciences", in: H. FREUDENTHAL (Hrsg.) The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences. Dordrecht (Holland) (1961), 1-37

BAJPAI, A.C./MUSTOE, L.R.: "An educational philosophy for scientists and technologists using computers", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 5 (1974), 601-606

BAJAPI, A.C./TINSLEY, J.D.: "Computers in higher education", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 5 (1974), 295 ff.

BAJPAI, A.C./MUSTOE, L.R. und WALKER, D.: "Mathematical education of engineers Part I. A critical appraisal", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 6, Nr. 3 (1976), 361-380

BAKER, J.: "Modern mathematics and the teaching of science some questions and answers", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 1 (1975), 93-96

BAKER, J.E.: "Traffic, a vehicle for functions", in: Math. Teaching, Nr. 56 (1971), 6-10

BAUSOR, J.: "Mathematics and science: Uneasy truce or open hostilities?" in: Math. Teaching, Heft 68 (1974), 32-41

BECK, U.: "Populationsdynamik und Mathematikunterricht", in: Didaktik der Mathematik, Heft 3 (1975a), 194-212

BECK, U./SCHMIDT H.-J.: "Ermittlung der Summenformeln von Halogenkohlenwasserstoffen mit Hilfe des Computers", in: Praxis der Naturwissenschaften (Chemie), Heft 10 (1975b), 281-289

BECK, U.: "Auswerten der Elementaranalyse und Einsatz der Euler-Formel zur Bestimmung von Summenformeln und Ringstrukturen-Beziehungen zwischen Chemie und Anschaulicher Topologie", in Chemie, Experiment und Didaktik, Heft 4 (1976a), 137-142

BECK, U.: "Mathematik am Skilift", in: Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover (1976b)

BECK, U.: "Auslaufvoränge aus Wasserbehältern - eine anwendungsorientierte Einfühung in die Analysis", in: Educational Studies in Mathematic, (1977a), 439-460

BECK, U./BÜTTNER, D./KUNTZSCH, W.: "Differenzengleichungen als Modelle analoger Phänomene in den Realwissenschaften, in: Chimica didact, Heft 5 (1977b), 233-263

BECK, U.: Problemorientierte Einführung in BASIC, Köln (1977c) Verlegt von Firma Rohde & Schwarz

BECKER, O.: Grundfragen der Mathematik, Freiburg (1964)

BERGMANN, L.U./SCHAEFER, C.: Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 1 (1965)

BIGALKE, H.: "Zur 'Gesellschaftlichen Relevanz' der Mathematik im Schulunterricht - Aufgaben und Ziele", in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Heft 1 (1976), 25-34

BIRKHOFF, G.: Rede zur G.D. Birkhoff-Preisvergabe in: The Mathematical Intelligencer, Heft 2 (1978), 93-96

BLUM, W.: "Ein Grundkurs in Analysis", in: Didaktik der Mathematik, Heft 3 (1975), 163-184

BÖLTS, H.: "Mathematik lernen unter dem Aspekt des Realitäts- und Anwendungsbezuges", in: Neue Sammlung, Nr. 4 (1975), 337-352

BORST, O./KLIKA, M.: "Praxisnaher und fächerübergreifender Unterricht in der Grundschule", in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover (1977)

BOSCH, K./WITTMANN, E.: "Automobilkrise" in: Didaktik der Mathematik, Heft 3 (1976), 205-215

BOUDON, R.: Mathematische Modelle und Methoden. Ullstein (1972)

BRAILLY, M.: "Un exemple d´Exploitation d´une Situation" in: Educational Studies, Band I (1968), 237-243

BREIDENBACH, W.: Rechnen in der Volksschule, Hannover (1956)

BROWN, M.: "Real Problems für Mathematics teacher", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Heft 3 (1972), 223-226

BRUNER, J.: Der Prozess der Erziehung, Schwan (1974)

de BRUIJN, N.G.: "Enumeration of three-shaped molecules", in: Selecta Mathematica III, Springer, 59-68

BURGHES, David N.: "Population dynamics and introduction to differential equations", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol.6, Nr. 3 (1975), 265-276

CANTOR, M.: Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 1-3, New York (1965)

CARPENTER, S.J./KNIGHT, K.R.: "Structured programming in Basic", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol.5 (1974), 539-542

CHRISTIANSEN, B.: "National objectives and possibilities for collaboration", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol.1 (1975), 59-76

CLAUS, V.: "Informatik als Ergänzung und Veränderung des Mathematik-Unterrichts", in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover (1978)

CHURCHMAN, C.W./ACKOFF, R.L. und ARNOFF, E.L.: Operation Research, München (1971) 5. Auflage

CLUTTERBUCK, C.K./ISHERWOOD, T.: "Computer graphics as an introduction to computing", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol.5 (1974), 463-470

COMBRIDGE, J.T.: "Mathematics-Slave, servant or souvereign", in: Mathematical gazette (1962), 179-196

COULSON, C.A.: "Mathematicas in Modern Chemistry", in: Chemistry in Britain, Heft 1 (1974)

COURANT, R./ROBBINS, H.: Was ist Mathematik? Berlin-Göttingen, Heidelberg (1962)

COURANT, R.: "Die Mathematik in der modernen Welt", in: OTTE, M. (Hrsg.) Mathematiker über die Mathematik (1974), 181-202

COWAP, G.R.: "The simulation of ship's navigation lights as an aid to the avoidance of collision at sea", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol5 (1974)

D'AMBRISIO, U.: "Overall Goals and Objectives for Mathematics Teaching", in: Proceedings of the International Congress on Mathematical Education, Karlsruhe (1977), 221-230

DAMEROW, P. u.a.: Elementarmathematik - Lernen für die Praxis, Stuttgart (1974)

DANTZIG, G.B.: Lineare Programmierung und Erweiterungen, Berlin (1966)

DEAK, E.: "Neue Wege im Analysisunterricht in Ungarn", Vortrag, Oberwolfach (1976)

DIEUDONNE, J.: " Recent Developments in Mathematics", in: American Mathematical Mounthly, März (1964), 239-248

DIEUDONNE, P.J.: "L´abstraction et l´intuition mathematique", in: Les mathematiques et la réalité, Kongressbericht des Centre Universitaire de Luxenbourg (1974)

DINGES, H.: "Spekulationen über die Möglichkeiten angewandter Mathematik", Schriftenreihe des IDM 1/1974

DORMANNS, K./KUYPERS, W.:"Axiome, Mengen, Strukturen", Schwann(1972)

DUDLEY, A.C.: "Bringing mathematics to life", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Heft 1 (1975), 111-117

DUDLEY, B.: "Teaching Size and Form in Biology", in: Journal of Biological Education 5 (1971), 187-191

ENGEL, A.: "Anwendungen der Analysis zur Konstruktion mathematischer Modelle", in: Der Mathematikunterricht, Heft 3 (1971), 5-55

ENGEL, A.: "Outline of a Problem Oriented, Computer Oriented and Application Oriented High School Mathematics Course", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology (1972), S. 445-492

ENGEL, A.:"Computerorientierte Mathematik",in: Der Mathematikunterricht (1975), 2ff.

ENGEL, A.: "The relevance of modern Fields of Applied Mathematics for mathematical Education", in: Educational Studies in Mathematic, Band 2 (1969), S. 257-269

FENSHAM, P.J./DAVISON, D.M. "Student Teachers Discover Mathematics in Industry", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Band 3, (1972), S. 63 - 69

FETTWEISS,E./SCHLECHTWEG, H.: Didaktik und Methodik des Rechenunterrichts, Paderborn 1965

FISCHER, W.L.: "Numerische Taxonomie", in: Der Mathematikunterricht, Heft 3 (1971), S. 57-66

FISCHER, W.L.: "Mathematisierung und Modellbegriff in den Naturwissenschaften", in: Der Mathematikunterricht Heft 3 (1971)

FISCHER, R.: "Fundamentale Ideen bei den reellen Funktionen", in: ZDM Heft 4 (1976)

FISCHER, R.: "Didaktische Probleme der Ingenieurmathematik", in: Lernen lernen im Bereich der Technik, Klagenfurt (1977)

FISCHER, R. und G. MALLE: "Pädagogik für Lehrer auf Höheren Schulen", Manuskript für einen Studienbrief, Universität Klagenfurt (1978)

FLEGG, H.G.: "The Mathematical Education of Scienticts and Technologists - A Personal View", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology , Band 5 (1974), 65-74

FLEMMING,W.: "The changed concept of mathematical education", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 6, Nr. 1 (1975),89-91

FLEMMING, W.: "A conference report", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 1 (1975), 89-91

FLETCHER, T.J.: "A heuristic approach to Matrices", in: Educational Studies in Mathematics (1968), 166-180

FLECHTER, T.J.: "Producing Numbers", in: Les Applications Nouvelles des Mathématiques et L´Enseignement Secondaire. Esch (lux) (1973), 161-174

FORD, B./HALL, G.G.: "Model building - an Educational Philosophy for Applied Mathematics", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Band 1 (1970), 77 - 83

FRAUNHOLZ, W.: Filmdemonstration auf der Tagung für "Didaktik der Mathematik",in Oberwolfach (1976)

FREUDENTHAL, H.: "Was ist Axiomatik und welchen Bildungswert kann sie haben", in: Der Mathematikunterricht 4 (1963), 5-29

FREUDENTHAL, H.: "Why to teach Mathematics so as to be useful", in: Educational Studies in Mathematics, Band 1 (1968), 3-8

FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1 und 2, Stuttgart (1973)

FREY, G.: Die Mathematisierung unserer Welt, Köln (1967)

FREY, G.: "Symbolische und ikonische Modelle", in: The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences (1960), 89-98

FREY, K.: "Drei Probleme des integrierten naturwissenschaftlichen Unterrichts," in: Der Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht (1975), 6

FUCKERT, D.: Staatsarbeit im Fach Chemie, PH Ruhr, (1978)

GERTHSEN,C.: Physik, Berlin (1964^{8})

GONSETH, P.F.: "Les mathématiques et la réalite", in: Les mathématiques et la Realité - Tagungsbericht des Centre Universitaire de Luxembourg (1974)

GRAUMANN, G.:"Praxisorientierte Geometrie", in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover (1977)

GREENMANN, J.V.:"Optimization as a Model-Building Theme", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 4 (1973), 321-328

GRIFFITHS, H.B./HOWSON, A.G.: Mathematics: Society and Curricula, Cambridge University Press (1974)

GRIFFITHS, H.B. Mathematics, hedgehogs and foxes, Camelot Press Southampton (1966)

GRIFFITHS, H.B.: "Mathematics education today", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 1 (1975), 3-15

GUNZENHAUSER, R.: "Computing in mathematics education", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 6, Heft 1 (1975)

GUTZMER, A.: "Allgemeiner Bericht der Unterrichtskommission," in: Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. 77. Versammlung in Meran, Leipzig (1906)

HALL, G.G. /WHITCOMBE , A.R.: "Applied Mathematics in the Secondary School", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 1 (1970), 235-244

HÄMMERLEIN, G.: "Mathematische Strukturen und physikalische Wirklichkeit", in: R. Klotz (Hrsg.) Mathematik und Experiment (1975)

HARSCH, G.: "Statistische Kugelspiele", in: Chemie, Experiment und Technologie (1977), 273-284

HARDING, R.D.: "Computer aided teaching of applied mathematics" in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 5,

HEATON, A.G.: "Some Aspects of the Mathematical Formulation and Solution of Real Problems", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 1 (1970), 2o7 - 211

HANCOX, D.:"A practical mathematics for all", in: Times Educ. Suppl. 22.2.74, p.22

HARDY, G.H.: A Mathematician's Apology, Cambridge (1969)

HEBENSTREIT, J.: "Computer science in education", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 5 (1974), 287-306

HEISENBERG, W.: Das Naturbild der heutigen Physik. Hamburg (1955)

HEITELE, D.:"An Epistemological View of Fundamental Stochastic Ideas",in: Educational Studies in Mathematics, Heft 2 (1975), 184 - 205

HENGST, M.: "Zur Existenz der Wahrscheinlichkeit", in: Der Mathematikunterricht, Heft 4 (1974)

HENN, R./KÜNZI, H.P.: Einführung in die Unternehmensforschung I,II, Springer (1968)

HERMANN, R.:"A view to applied mathematics",in: The Mathematical Intelligencer, Heft 3 (1978), 145-147

HERTZ, H.: Prinzipien der Mechanik, Leipzig (1910)

v. HIELE, P.M.: Development and Learning Process, Groningen 1959

HILTON, P.: "Die Ausbildung von Mathematikern, heute", in: M. Otte (Hrsg.) Mathematiker über die Mathematik, Springer (1974)

HILTON, P.:"Teaching and Research: A False Dichotomy",in: The Mathematical Intelligencer, Heft 2, (1978), 76-80

HIRSCH, G.: "Mathématisation et realité", in: Les mathématiques et la Réalité. Tagungsbericht des Centre Universitaire de Luxembourg (1974)

HOLFORD, D.G.:" 1) The chemist´s viewpoint
2) Mathematics in science teaching: a view of current literature",
in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 1 (1975), 101-103

HOPE, C./ROTHERY, A.: "Mathematical Modelling in the Classroom", in: Mathematical Teaching (1975), 36-39

HOWSON, A.G.: "The aims and design of post-qualification courses in mathematical education", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 8, Nr. 3 (1977), 351-357

HUGHES, M.E.O./BAJPAI, A.C.: "An Experiment in Teaching Elementary Ideas of Vectors", in: International Studies for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. (1970), 131-134

HUTH, R.: "Physik im Mathematikunterricht," in: Der Mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, Heft 1 (1976), 14-20

HYSLOP, J./LEWIS, R.: "Mathematical Models in Science", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology (1970), 375-382

JAEGER, A. und WENKE, K.: Lineare Wirtschaftsalgebra, Stuttgart (1969)

JUNKER, W./SCYRBA, K.: Lebensnahes Rechnen, Ratinen 1964

KAC, M.: Rede zur G.D. Birkhoff-Preis Vergabe, in: The Mathematical Intelligencer, Heft 2 (1978), 97-99

KANITZ, O.F.: "Eine objektive, doch gefährliche Rechen-

KANJI, G.K.: "Analysis of the relative importance of some factors affecting house prices in a local market in 1970", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Nr.3 (1975), 277-282

KAPUR, J.N.: "Combinatorial Analysis and School Mathematics", in: Educational Studies in Mathematics, Vol.3

KARASCHEWSKI, H.: Wesen und Weg des ganzheitlichen Rechenunterrichts, Bd. 1 und 2, Stuttgart (1966, 1962/1970)

KEMENY, J.G. et al.: Einführung in die endliche Mathematik, Ludwigshafen (1963)

KEMPER, H.: "Kritische Bemerkungen zu einigen Kursen der Kollegstufe", Didaktik der Mathematik 2 (1974), 159-162

KIRSCH, A.: "Über Ziele der 'neuen Mathematik' in der Schule", in: Westermann Päd. Beiträge, Heft 3 (1974), 155-164

KIRK, R.J.: "The mathematics of modular systems in building", in: Mathematics in school, Heft 5 (1978), 8-9

KLAMKIN, M.S.: "Pure Mathematicians as Teachers of Applied Mathematicians", in: Educational Studies in Mathematics, Heft 1 (1968), 18-23

KLAMKIN, M.S.: "On the Ideal Role of an Industrial Mathematicians and its Educational Implications", in: Educational Studies in Mathematics 3 (1971), 244-269

KLAMKIN, M.S.: "On the Teaching of Mathematics so as to be useful", in: Educational Studies in Mathematics 1 (1968), 126-160

KLAUS, G./BUHR, M. (Hrsg.): Philosophisches Wörterbuch, Berlin (1972), 729-733

KLEIN, F./RIECKE, E. (Hrsg.): Neue Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an höheren Schulen, Leipzig (1904)

KLEIN, F./SCHIMMACK, R.: Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen, Leipzig (1907)

KLEIN, F.: Elementarmathematik vom Höheren Standpunkt, Berlin-Göttingen-New York (1933)

KLEIN, F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, New York (1967)

KLEIN, F.: "Hundert Jahre mathematischer Unterricht an höheren preußischen Schulen", in: Jahresberichte der DMV, 13 (1904), 347-356

KLINE, M.: Why Jonny can't add; St. Martin Press (1979)

KLINE, M.: Why the Professor can't Teach, St. Martin Press (1978)

KLINE, M.: "Mathematics and Axiomatics", in: The role of Axiomatics and Problem Solving in Mathematics, Ginn Co (1966)

KLINE, M.: Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press (1972)

KLÖTZ, R. (Hrsg.) Mathematik und Experiment, Köln (1975)

KMK-Beschluß, Empfehlungen und Richtlinien zur Modernisierung des Mathematikunterrichts an den allgemeinbildenden Schulen

KNOWLES, F.L.: "An approach to applicable mathematics", in: Mathematics Teaching (1971), 50-53

KOLMOGOROW, A.: "Die moderne Mathematik und die Mathematik in der modernen Schule", in: Mathematiker über die Mathematik, M. OTTE (Hrsg.) (1974), 419-424

KRUCKENBERG, A.: Die Welt der Zahl im Unterricht, Hannover, 1950^{6}

KRYGOWSKA, A.Z.: "Processus de la mathematisation", in: Educational Studies in Mathematic 1 (1968), 9-18

KÜHNEL, J.: Neubau des Rechenunterrichts, Klinkhardt (1925^{5})

LAMBACHER, R./SCHWEIZER, W.: Algebra I und II, Stuttgart (1957^{11})

LAMBACHER, T./SCHWEIZER, W.: Analysis, Stuttgart (1970^{3}, 1958^{9})

LAMBACHER, T./SCHWEIZER, W.: Analytische Geometrie, Stuttgart (1958^{10})

LAMBACHER, T./SCHWEIZER, W.: Algebra I, Stuttgart (1970)

LENNE, H.: Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart (1969)

LEVINSON, N.: Coding Theory: "A Counterexample to G.H. Hardy's Conception of applied mathematics", in: A.M.M. 77, (1970), 249-258

LIETZMANN, W.: Das Wesen der Mathematik, Braunschweig (1949)

LIETZMANN, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts, Band I,II,III, Quelle/Meier, Leipzig (1919-1924)

LIETZMANN, W.: Methodik des mathematischen Unterrichts, bearbeitet von Stender, Heidelberg (1961)

LÖRCHER, G.A.: "Mathematikunterricht und Vorbereitung auf die Berufswelt", in: Beiträge zum Mathematik-Unterricht, Hannover (1978)

LUBOWSKY, G.: Aufbau des grundlegenden Rechenunterrichts, München (1968)

MAGENAT, N./THALMANN, D.: "Differentialequations, an interdisciplanary model", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Heft 1, (1978), 35-42

MALE, R.M.: "Defining minimal competency", in: The Mathematics Teacher, Heft 2 (1978), 86

MALLE, G.: "Balance in sozialen Strukturen", in: Didaktik der Mathematik, Heft 3 (1977)

MEADOWS, D.L.: Die Grenzen des Wachstums, rororo (1973)

MEYER, D. und G.: "Das ökologische Problem der Räuber-Beute-Beziehung, simuliert mit Hilfe eines Computerprogramms", in: Der Biologieunterricht, Heft 6 (1975)

MILLS, R.J./MIDDLETON, S./MORAN, F.: "Simulation in the teaching of concepts of respiratory gas exchance", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol.5

MORELY, A.: "Mathematics as 'Process'", in: The Mathematics Teacher, Nr. 1 (1973), 39-45

MORRIS, R.M./DEAN, P.G.: "The use of interactive simulation", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 5 (1974), 389-394

MÜLLER, D.W.: "Thesen der Didaktik der Mathematik", in: Math. Physik. Semesterberichte, Vol. 5 (1974), 389-394

MÜLLER, D.W. "Thesen zur Didaktik der Mathematik", in: Math. Physik. Semesterberichte Band XXI/Heft 2 (1974), 164-169

MÜLLER,G./WITTMANN, E.: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe, Braunschweig 1977

MÜNZINGER, W.: "Motivation und Mitbestimmung im Mathematikunterricht", in: KORAG, Heft 5 (1975)

MAKI, D./THOMPSON, M.: Mathematical models and applications, Prentice-Hall (1973)

NÄGERL, H.: "Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin, im Umgang mit der Mathematik", in: Didaktik der Mathematik, Heft 2 (1973), 143-157

NEANDER, R.: "Curriculare Perspektiven für den Mathematikunterricht", in: ROLFF, H.G. u.a.: Strategisches Lernen in der Gesamtschule (1974)

NEUMANN, J.V.: "Der Mathematiker", in OTTE (Hrsg.) "Mathematiker über die Mathematik", Berlin, Heidelberg, New York (1974)

NEWTON, D.W.: "Bicycle mathematics", in: Mathematics in School, Nr. 5 (1978), 21-23

NISS, M.: "The crisis in mathematics instruction and a new teacher education at grammar school level", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 3 (1977), 303-321

NOBLE, B.: Applications of undergraduate Mathematics in Engenering, New York (1967)

OEHL, W.: Der Rechenunterricht in der Grundschule, Hannover (1962)

OEHL, W.: Der Rechnenunterricht in der Hauptschule, Hannover (1965)

OFFENER, C.D.: "Back-to-Basics in Mathematics: An Educational Fraud", in: The mathematics Teacher, Heft 3 (1978), 211-217

OGILVY, C.S. Unterhaltsame Geometrie, Braunschweig (1976)

ORMELL, C.P. "Newtonian Mechanics and the Sixth Form Syllabus", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technolgy, Vol. 2 (1971) 233-241

ORMELL, C.P.: "Mathematics - Science of possibility", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 3 (1972a), 329-341

ORMELL, C.P.: "Mathematics, Applicable versus Pure- and Applied", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. (1972b), 125-131

PAPERT, S.: "Teaching Children to be Mathematicians versus teaching about Mathematics", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 2 (1970)

PARSONS, R.: "The other half of Mathematics", in: Mathematics Teaching, 30-32

PATTERSON,C./WEARING, J.L.:"Short course training in finite element analysis at the university of sheffield ", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 5 (1974), 565-670

PERRET, C./SUAREZ, A.: "Verfahren zur Koordination des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts", in: IPN-Band 5

PIER, J.P.: "Die Bedeutung der Mathematik aus der Sicht ihrer Begründer", in: Der Mathematik-Unterricht, Heft 4 (1971), 23-29

POLLAK, H.O.: "One some of the problems of teaching applications mathematics", in: Educational Studies 1 (1968), 24-30

POLLAK, H.O.: "How can we teach application of mathematics", in: Educational Studies in Mathematics (1969), 393-404

POLLAK, H.O.: Trendberichte zum III. Int. Kongress für M.U. (1976)

POLLAK, H.O./KLEE, V.: "Math. in china is devoted to production and society", in: Siam News, Dec. (1976), No.6

POLYA, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben, Basel (1966)

QUADLING, D.: "Mathematics and Science, Friction or Fusion", in: Math. Teaching (1971), 57-59

RAY, A.K.: "An outlook in teaching and Research in Mathematics in Educational Institutions", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 4 (1973), 289-302

RENYI, A.: Dialoge über Mathematik, Birkhäuser Verlag, Stuttgart (1967)

REVUZ, A.: "Further Training of Mathematics Teacher of Secondary Level", in: Educational Studies in Mathematic, Vol. 1 (1968^b), 493-498

REVUZ, A.: "Les Piéges de l´enseignement des Mathématiques", in: Educational Studies in Mathematic, Vol. 1 (1968^a), 31-36

REVUZ, A.: "The position of Geometry in Mathematical Education" in: Educational Studies in Mathematic 4 (1971), 48-52

RICHARDS, E.J.: "Some Ideas about mathematical Education", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology 2 (1975), 377-395

Richtlinien und Lehrpläne für die Hauptschule in NRW, Rattingen (1973)

RIVETT, B.: Concept of O.R., Oxford (1968)

Royal Society Institute of biology, Report of the working party on mathematics for biologists, in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 6, Nr. 1 (1975), 123-135

ROLLER, E, etal.: Mathematik B5-B10, Stuttgart (1971-1973)

RUSTAGI, J.S.: Mathematical Models in Medicine. In: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 2 (1971), 193-203

SCHEY, H.M. etal.: "A Laboratory, Computer and Calculus Based Course in Mathematics", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Heft 1 (1970), 115-130

SCHMIDT, H.-J.: "Zur mathematischen Interpretation chemischer Versuchsergebnisse im Chemieunterricht", in: Chemie, Experiment und Didaktik (1976), 409-416

SCHMIDKUNZ, H.: "Ein interdisziplinärer Zugang zum Themenkreis 'Wasser'",Kolloquiumsbericht, PH Ruhr, Fachbereich VI, (1976)

SCOTT, D.: "Investigation of a 'Maths Today' Problem and exercise in pattern-spotting", in: Mathematic Teaching (1971)

SCHRAGE, G.: "Computergraphik als Instrument der Modellbildung", Manuskript, PH Ruhr, Dortmund (1978)

SCHIFFER, M.: "Applied Mathematics in the High school", in: Studies in Mathematics, Vol. 10 (1963)

SCHÖN, B.: "Curriculare Perspektiven für den Mathematikunterricht",in: KORAG: Beiträge zum Modellversuch 5, Frankfurt (1975)

SCHUBERT, E.: "Die Differentialgleichung vom Typ y' = ky als Strukturelement in der Physik", in: Der Physikunterricht, Heft 1 (1969), 35-52

SCHUBRING, G.: "Gegenstand und Methode im Mathematikunterricht aus der Sicht des genetischen Prinzips", in: Beiträge zum Mathematikunterricht,Hannover (1976)

SCHUPPAR, W.: "Continental traditions and reforms", in: International Journal for Mathematical Educations in Science and Technology, Vol. 1 (1975), 37-58

SERVAIS, W.: "Comment enseígnerla Mathématique pour qu´elle soit utile?", in: Educational Studies in Mathematic (1968), 37-53

SIDA, D.W.: "Old and new challenges to applied mathematics" in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 6, Nr. 2 (1975), 205-210

SONDHEIMER, E.H.: "The Mathematical Description of nature", in: Mathematical Gazette, dec. (1961), 305-318

SRIVASTAVA, R.S.L./BANERJEE, M.: "A mathematical criterion for a stable goverment", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol.6, Nr. 2 (1975), 211-218

STAHLKNECHT, P.: Operations Research, Braunschweig (1972)

STEIN, G.: "Die Entwicklung von Populationen im computer-orientierten Mathematik-Unterricht", Heft 2 (1977)

STEIN, G.: "Zur Berechnung der Schleifenbahnen von Planeten", in: Lernzielorientierter Unterricht, Heft 2 (1976), 43-45

STEIN, G.H.W.: Die Feldmaus, Wittenberg (1958)

STEINER, H.G.: "Zur Methode des mathematisierenden Unterrichts", in: Dorfler, W. - Fischer, R.: Anwendungsorientierte Mathematik in der SII, Klagenfurt (1976)

STOWASSER, R.: "Küstenschiffahrt, Landmessen, Billard - drei Problemfelder der Geometrie", in: Der Mathematik-unterricht, Heft 3 (1976), 24-50

STRUBECKER, K.: "Mathematik als Hilfsmittel der modernen Erfahrungswissenschaften", in: Physikalische Blätter (1960)

SZYRBA, K.: "Arbeit in Sachgebieten", Ratingen(1964)

TAMMADGE, A.: "How much does ist cost to keep a dog?" in: Mathematics Teaching 57 (1971), 9-11

THOM, R.: "Moderne Mathematik: Gibt es das?" in: Didaktik der Mathematik, Heft 4 (1973), 251-263

TIETZ, H.: Lineare Geometrie, Vandenhoeck & Ruprecht (1973)

TIETZ, H.: "Zur Didaktik der Mathematik", in: Zentralblatt der Mathematik, Heft 3 (1974), 131-132

TITZE, H.: Algebra, Band 1 und 2, München (1971^{9}), (1971^{8})

TOMSLEY, D.: "Mathematics and biology teaching", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol1 (1975), 97-98

TRUESDELL, C.: Rede zur G.D. Birkhoff-Preisvergabe, in: The Mathematical Intellegencer, Heft 2 (1978), 99-101

TWERSKY, V.: "Calculus and Science", in: Studies in Mathematics, Vol15 (1967)

ULAM, S.: "The Applicability of Mathematics", in: The Mathematical Sciences, M.I.T. Press Massachusets (1968)

Vorläufige Lehrpläne für Gymnasien der Normalform, in: Kultus und Unterricht, Amtsblatt des Kultusministeriums Baden-Württemberg, Sondernummer 4 (1971)

VALLEE, R.: "New mathematics and teaching", in: International Journal for Mathenatical Education in Science and Technology, Vol.6, Nr. 2 (1975)

VOLK, D. u.a.: "Lohnerhöhungen in mathematischer Behandlung", Braunschweig (1976)

VOLLRATH, H.J.: "Formeln und Berufsorientierung im Mathematikunterricht", in: Westermanns Beiträge (1975), 489-496

WAERDEN, van der B.L.: Erwachsende Wissenschaft, Basel (1956)

WAGENSCHEIN, M.: "Der Vorgang des Verstehens. Pädagogische Anmerkungen zum mathematischen Unterricht." in: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 26, Heft 7 (1973), 385-395

WALLIS, B.W.: "How is Mathematics used?" in: Mathematic Teaching (1971), 14-17

WALTHER, G.: Balancierte Graphen", in: Educational Studies in Mathematic (1976) 2, 465-495

WEBB, G.G.: "Correlating the teaching of mathematics and science", in: International Journal for Mathematical Education in Science and Technology, Vol. 6, Nr. (1975), 105-110

WIEDLING, H.: "Zur Rolle der anwendungsbezogenen Mathematik im Schulunterricht", in: Praxis der Mathematik, Nr. 6 (1975), 143-149

WINKELMANN, B.: "Elastische Mathematisierungsprobleme im Analyseunterricht" , in: Beiträge zum Mathematikunterricht (1975), 208-212

WINTER, H./ZIEGLER, T.: Neue Mathematik, Band 1-10, Hannover (1969-72 a)

WINTER, H./ZIEGLER, T.:Lehrerheft zu 'Neue Mathematik', Heft 1-10, Hannover (1969-72b)

WINTER, H.: "Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule", in: M.U., Heft 5 (1971), 40-65

WINTER, H.: "Über den Nutzen der Mengenlehre für den Arithmetikunterricht in der Grundschule", in: Beiträge zum Mathematikunterricht (1972a), 161-192

WINTER, H.: Entwicklungstendenzen der Didaktik der Mathematik im Rahmen der Lehrerbildung, Ratingen (1972b)

WINTER, H.: "Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematik-Unterricht in der Grundschule",in: Beiträge zum Lernzielproblem, Henn (1972c)

WINTER, H.: "Allgemeine Lernziele im Mathematikunterricht", in: Zentralblatt der Mathematik (1975), 106-116

WINTER, H.: "Erfahrungen zur Stochastik in der Grundschule (Klasse 1-6)", in: Didaktik der Mathematik (1976a), 22-37

WINTER, H.: "Strukturorientierte Bruchrechnung", in: Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover (1976b)

WINTER, H.: "Die Erschließung der Umwelt im Mathematikunterricht der Grundschule", in: Sachunterricht und Mathematik in der Grundschule (1976c),337-353

WITTMANN, E.: "Didaktik der Mathematik als Ingenieurwissenschaften", in: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Heft 3 (1974a), 119-121

WITTMANN, E.: "Themenkreismethode und lokales Ordnen", in: Der Mathematikunterricht, Heft 1 (1974b)

WITTMANN, E.: Grundfragen des Mathematikunterrichts, Vieweg Verlag, Braunschweig (1974^1,1976^4,1978^5)

WITTMANN, E.: "Zur Rolle didaktischer Prinzipien", in: Beiträge zum Mathematikunterricht, Hannover (1975a)

WITTMANN, E.: Anwendungsorientierte Einführung in die Lineare Algebra, Vorlesungsmanuskript (1975b)

WITTMANN, E.: "Ein genetischer Zugang zu linearen Codes", Vortrag auf dem 1. Kärtner Symposium für Mathematikdidaktik (1976a)

WITTMANN, E.: "Eine Erweiterung des operativen Prinzips", in: Festschrift für Wilhelm Oehl, Hannover (1976b)

WÖHRLE, K./KRATZ, J./KEIL,K.: Infinitesimalrechnung, München (1972^8)

ZURMÜHL, R.: Matrizen, Springer (1964)

ZIEGLER, R.: Theorie und Modell, München, Wien (1972)

UWE BECK

Lebenslauf

12.6.45	geboren in Nürtingen als Sohn des Lehrers Ernst Beck und seiner Frau Martha, geb. Eschenbächer
1951-1955	Besuch verschiedener Volksschulen
1955-1965	Besuch des Gymnasiums in Nürtingen und Reifeprüfung
1965-1971	Studium Mathematik, Physik, Sportwissenschaften an der Universität Tübingen und der TU Berlin
1971	1. Staatsexamen für das Lehramt an Gymnasien in Mathematik und Sportwissenschaften
1971-1972	Referendardienst am Gymnasium in Kirchheim/Teck
1973	Tätigkeit als Studienassessor am Progymnasium in Nürtingen
1973-1976	Wissenschaftlicher Assistent am Seminar für Didaktik der Mathematik der PH Ruhr in Dortmund
1976	Ernennung zum Akademischen Rat

Seit 1971 bin ich mit Gabriele, geb. Balbach verheiratet. Unsere beiden Söhne wurden 1973 (Torsten) und 1977 (Christian) geboren.

Koffler-Druck · Schwanenstraße 30 · 4600 Dortmund 1 · Ruf 52 30 34